Neke odrednice ranog matematičkog razvoja

Grden, Maja

Master's thesis / Diplomski rad

2018

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Education and Rehabilitation Sciences / Sveučilište u Zagrebu, Edukacijsko-rehabilitacijski fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:158:046190

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-04-20**

Repository / Repozitorij:

Faculty of Education and Rehabilitation Sciences - Digital Repository

Sveučilište u Zagrebu

Edukacijsko-rehabilitacijski fakultet

Diplomski rad

Neke odrednice ranog matematičkog razvoja

Maja Grden

Zagreb, rujan 2018.

Sveučilište u Zagrebu

Edukacijsko-rehabilitacijski fakultet

Diplomski rad

Neke odrednice ranog matematičkog razvoja

studentica:

Maja Grden

mentorica:

prof.dr.sc. Mirjana Lenček

Zagreb, rujan 2018.

Izjava o autorstvu rada

Potvrđujem da sam osobno napisala rad „Neke odrednice ranog matematičkog razvoja“ i da sam njegova autorica.

Svi dijelovi rada, nalazi ili ideje koje su u radu citirane ili se temelje na drugim izvorima jasno su označeni kao takvi te su adekvatno navedeni u popisu literature.

Maja Grden

Zagreb, 12. rujna 2018.

Zahvala

Hvala mojoj obitelji na podršci i potpori tijekom svih godina studija.

NEKE ODREDNICE RANOG MATEMATIČKOG RAZVOJA

Maja Grden

Mentorica: prof. dr. sc. Mirjana Lenček

Diplomski studij logopedije

Sažetak

Rani matematički razvoj obuhvaća usvajanje matematičkih znanja koje se odvija tijekom predškolskog razdoblja, dakle prije formalnog učenja matematike kakvo je prisutno u školi. Tijekom tog perioda djeca pokazuju sposobnost matematičkog mišljenja u svakodnevnoj igri na različitim razinama; u domeni aritmetike, geometrije i algebre.

Cilj ovog rada bio je ispitati matematička znanja kod četverogodišnjaka, petogodišnjaka i šestogodišnjaka urednog razvoja kako bi se dobile informacije o tome što predstavlja uredan razvoj matematičkih koncepata u određenoj dobi kod govornika hrvatskog jezika. Istraživanje je obuhvaćalo ukupno devedesetero djece, 30 četverogodišnjaka, 30 petogodišnjaka te 30 šestogodišnjaka koji pohađaju redovni vrtićki program u Zagrebu.

Za potrebe provedbe ovog istraživanja osmišljen je set zadataka prema uzoru na zadatke koji se koriste u svjetskim testovima za procjenu ranih matematičkih znanja. Statističkom obradom podataka dobivena je statistički značajna razlika između triju dobnih skupina ispitanika u ukupnom rezultatu, kao i na pojedinim varijablama iz matematičkih kategorija broja i usvajanja brojenja, aritmetičkih operacija, problemskih zadataka i matematičkih obrazaca. Nadalje, u svim zadacima najstarija dobna skupina je ostvarivala najbolje rezultate.

Dobiveni rezultati u velikoj su mjeri odgovarali podacima o ranom matematičkom razvoju koji postoje u svjetskoj literaturi te dali prikaz o tijeku usvajanja matematičkih koncepata u predškolskoj dobi kod govornika hrvatskog jezika.

Ključne riječi: matematički razvoj, predškolska dob, rizik za diskalkuliju

DEVELOPMENT OF EARLY MATH SKILLS

Maja Grden

Supervisor: prof. dr. sc. Mirjana Lenček

Master's Program in Speech Language Pathology

Summary

Early math development includes a set of skills which children develop through the first six years of their life, before they enter the formal education system. During this time children show a variety of abilities that are connected with mathematical thinking, mostly through their everyday play. These abilities include mathematical thinking in the areas of arithmetic, geometry and algebra.

The aim of this research was to investigate the mathematical skills in children from age four to age six and describe the growth in children's early math skills whose native language is Croatian. The research included ninety children, 30 four year olds, 30 five year olds and 30 six year olds who are attending the preschool program in the city of Zagreb.

A set of tasks was designed for the purposes of this research. The tasks are based on tests used for assessing early math skills in some North American and European countries. Statistical analysis of the data showed significant difference in performance of three age groups in the overall result, as well as in tasks in the categories of counting, arithmetic operations, problem tasks and mathematical patterns. The group of six year olds showed the best performance in all tasks.

The results correspond to data in the field of the development of early math skills conducted from research in some North American and European countries and give information about the development of early math skills in Croatian speaking children.

Keywords: math development, preschool, risk for dyscalculia

Sadržaj

1 UVOD 9
1.1 O matematici 9
1.2 Matematički razvoj u dojenačkoj dobi 10
1.3 ANS (Approximate number system) – intuitivni sustav za brojeve 11
1.4 Matematika kao simbolički sustav 13
1.5 Broj i usvajanje brojenja 16
1.6 Aritmetičke operacije 19
1.7 Problemski zadaci 21
1.8 Prepoznavanje oblika 23
1.9 Mjerenje 24
1.10 Matematički obrasci 25
2 CILJ I SVRHA RADA 26
3 PROBLEM I PRETPOSTAVKE ISTRAŽIVANJA 27
4 METODE ISTRAŽIVANJA 28
4.1 Uzorak ispitanika 28
4.2 Način ispitivanja 28
4.3 Mjerni instrumenti – opis zadataka korištenih u istraživanju i njihovo bodovanje 28
4.4 Varijable istraživanja 32
5 OBRADA PODATAKA 34
6 REZULTATI I RASPRAVA 35
6.1 Broj i usvojenost načela brojenja 37
6.1.1 Automatizirano brojenje do 10 37
6.1.2 Automatizirano brojenje do 30 38
6.1.3 Usvojenost načela pridruživanja 1 na 1 39
6.1.4 Usvojenost načela pridruživanja: uočavanje razlike u količini 40
6.1.5 Usvojenost načela stabilnog poretka: prepoznavanje grešaka u brojenju 41
6.1.6 Usvojenost načela kardinalnosti 43
6.1.7 Uspoređivanje 44
6.1.8 Prebrojavanje skupa 45
6.1.9 Usvojenost načela ordinalnosti – prva skupina zadataka 46
6.1.10 Usvojenost načela ordinalnosti – druga skupina zadatka 48
6.1.11 Usvojenost načela konzervacije 49
6.1.12 Brojenje od zadanog broja i brojenje u intervalu 50

6.1.13 Brojenje unatrag od 10 51
6.1.14 Brojenje po sekvencama 52
6.1.15 Čitanje brojeva 53
6.1.16 Uparivanje količine i simbola 54
6.2 Aritmetičke operacije 55
6.2.1 Rješavanje aritmetičkih operacija uz vizualnu podršku 55
6.2.2 Rješavanje aritmetičkih operacija uz pronalaženje razlike (artimetičke operacije s „kućicama“) 57
6.3 Problemski zadaci 58
6.4 Prepoznavanje oblika 59
6.5 Razvrstavanje 60
6.6 Mjerenje: zadaci iz kategorije odnosi među likovima 61
6.7 Matematički obrasci 62
7 POTVRDA PRETPOSTAVKI 64
8 ZAKLJUČAK 65
9 POPIS LITERATURE 68
9.1 Internetski izvori 71
10 PRILOG 72
10.1 Zadaci korišteni za ispitivanje ranih matematičkih znanja 72

1 UVOD

1.1 O matematici

Prema Hrvatskom enciklopedijskom rječniku (2002.) matematika se definira kao „znanost koja se bavi apstraktnim i kvantitativnim odnosima među čistim veličinama (brojevima) i prostornim (geometrijskim) oblicima i pojmovnim tvorevinama i njihovim simbolima uključuje i kvantitativne operacije i rješavanje kvantitativnih problema u primjeni“. Dijeli se na tri osnovne grane, a to su aritmetika, algebra i geometrija. Aritmetika se bavi proučavanjem prirodnih brojeva i računskih operacija, kao što su zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje (Hrvatska enciklopedija, 2009). Za razliku od aritmetike, u algebri se umjesto brojeva koriste apstraktni simboli, a cilj algebre je opisati opća svojstva brojeva i generalizacije koje iz njih proizlaze (Hrvatska enciklopedija, 2009). Geometrija je grana matematike koja proučava položaj, oblik, i svojstva likova u ravnini i geometrijskih tijela u prostoru te njihov međusobni odnos (Hrvatska enciklopedija, 2009). Naizgled se čini da je prvi susret s matematikom u školi, gdje se djecu formalno poučava o znanjima iz prethodno navedenih grana. Međutim, matematika nas svakodnevno okružuje, nakon završetka i prije početka našeg formalnog obrazovanja. Od uobičajene svakodnevne kupovine gdje se susrećemo s aritmetičkom operacijom zbrajanja te s računanjem postotaka kroz popuste, do pravljenja ručka gdje baratamo mjernim jedinicama kao što su grami i dekagrami, procjenjujemo koju veličinu posude koristiti pa sve do procjene o tome kojim putem najbrže stići do željenog odredišta. Kako i kod odraslih, tako i kod male djece možemo primijetiti određena matematička znanja. Tako primjerice djeca biraju veću igračku umjesto manje, uočavaju kada netko ima više slatkiša nego oni, slažu umetaljke prema određenim oblicima te broje do 10 ,20 a neki čak i do 100. Istraživanja su pokazala da matematička znanja u predškolskoj dobi mogu predvidjeti razinu matematičkih znanja u školskoj dobi (Duncan i sur, 2007; Mazzoco i Thompson, 2005). Upravo zbog toga su rana matematička znanja postala predmet interesa istraživača koji su nastojali i nastoje utvrditi koji su procesi u pozadini tih znanja te utječu na usvajanje matematičkih koncepata. Rezultati takvih istraživanja usmjereni su na spoznaje koje mogu doprinijeti razvoju kvalitetnijeg sustava podučavanja i razvoju podrške pojedincima koji imaju teškoća u usvajanju matematike.

1.2 Matematički razvoj u dojenačkoj dobi

Dugi niz godina bilo je prihvaćeno mišljenje da se novorođenčad rađa bez ikakvih znanja, odnosno da je mozak novorođenčadi „tabula rasa“ te da ona promatranjem usvajaju informacije o svijetu oko sebe (Piaget, 1960; prema Deheane, 2011). Međutim, krajem dvadesetog stoljeća proveden je niz istraživanja kojima je dokazano da novorođenčad posjeduje znanja o različitim domenama ljudskog funkcioniranja. Jedno od prvih istraživanja matematičkog razvoja u dojenačkoj dobi proveli su Starkey i Cooper, 1980. godine. Oni su testirali dojenčad u dobi od 16 do 30 tjedana kroz habituaciju. Bebama su prikazane slike s crnim točkama koje su se izmjenjivale te je praćeno zadržavanje njihovih pogleda na određenom podražaju. U početku im je dan jednaki podražaj (nekoliko slika u nizu s tri točke), a zatim su prikazali sliku s dvije točke. Istraživači su primijetili da bebe dulje zadržavaju pogled na slikama koje su neočekivane, odnosno, gdje je promijenjena količina točaka. Istraživanje količine kod dojenčadi su nekoliko godina kasnije ponovili i Antell i Keating (1983; prema Deheane 2011), no s dojenčadi koja je bila stara svega nekoliko dana. Čak i dojenčad u toj dobi mogla razlikovati količinu od dvije i tri točkice. Bertoncini i suradnici (1988) su u svom istraživanju procjene količine kod dojenčadi umjesto vizualnih koristili auditivne podražaje. Dojenčadi u dobi od nekoliko tjedana do dva mjeseca su puštali snimke pseudoriječi različite duljine slogova i promatrali su promjene u brzini sisanja. Kada je dojenčad čula nekoliko puta za redom riječi koje su imale jednak broj slogova, brzina sisanja je bila jednaka. Međutim, kada su se u nizu pseudoriječi pojavile riječi koje su sadržavale različit broj slogova od prethodnih riječi, brzina sisanja se promijenila, što je bio znak da je dojenčad uočila razliku u broju slogova. Zanimljivost u ovom istraživanju je bila ta da je novorođenčad stara nekoliko dana uočila razliku u broju slogova samo kada je riječ imala različiti vokal od prethodne, dok razliku nije uočila kada je vokal bio isto. S druge strane, dojenčad stara dva mjeseca je uspješno uočila razliku u broju slogova u oba slučaja, i kada je bila prisutna promjena vokala i kada je vokal u novoj riječi ostao isto. Istraživači su pretpostavili da su ove razlike između novorođenčadi i dojenčadi stare dva mjeseca prisutne zbog nezrelijeg fonološkog sustava kod novorođenčadi, a ne zbog nezrelije percepcije količine. Istraživanja s kraja prošlog stoljeća pokazala su da osim razlikovanja količine, dojenčad ima sposobnost uparivanja zvuka i objekata te ranih oblika aritmetičkih operacija. Tako je u istraživanju Starkey i suradnika (1990, prema Deahane, 2011). dojenčad u dobi od 6 do 8 mjeseci dulje zadržavala pokret na objektima čiji je broj odgovarao broju zvukova koje su čuli kroz zvučnik, nego na objektima čiji je broj bio manji ili veći od broja zvukova koje su

čuli. U novijim istraživanjima je također potvrđena sposobnost dojenčadi da upari vizualni i auditivni podražaj jednak u količini. Štoviše, novija istraživanja su pokazala da novorođenčad ima sposobnost uparivanja zvukova s objektom ako uparena količina iznosi od 1 do 12 (Izard Sann, Spelke i Steri, 2009). Najviše iznenađujuće otkriće je da dojenčad razumije jednostavne operacije zbrajanja i oduzimanja. U svojem istraživanju Wynn (1992) je promatrala reakcije dojenčadi od 5 mjeseci tijekom dodavanja, odnosno skrivanja Mickey Mouse lutke. Ispitanicima je prvo prikazana jedna lutka samostalno, zatim druga samostalno, a na kraju tog niza su im bile prikazane dvije, odnosno tri ili ponovno samo jedna lutka. Dojenčad je puno dulje zadržavala pogled u trenutku kada je su na kraju bile prikazane tri ili samo jedna lutka, nego kad su bile prikazane dvije. Ista situacija se ponovila kada su drugoj grupi prikazane prvo dvije lutke, a zatim jedna pa onda na kraju opet jedna, odnosno dvije. Dojenčad je zadržavala dulje pogled na neočekivanom ishodu, odnosno, kada su na kraju ostale dvije umjesto jedne lutke. Autorica je zaključila da je dojenčad intuitivno znala da dodavanje, odnosno micanje jedne lutke dovodi do promjene u količini predmeta i zbog toga je duže zadržavala pogled na ishodima koji se nisu odgovarali toj promjeni (1+1=3, tj 1+1=1, odnosno 2-1=2). Iako je u svim navedenim istraživanjima količina koju je dojenčad percipirala bila ograničena na tri do četiri objekta, rezultati ovih istraživanja su pokazali da kod ljudi postoji neki urođeno, intuitivno matematičko znanje.

1.3 ANS (Approximate number system) – intuitivni sustav za brojeve

Urođeno matematičko znanje poznato je kao ANS (approximate number system), odnosno kao intuitivni sustav za brojeve. Sustav za brojeve je kognitivni sustav pomoću kojega možemo činiti procjene o količini objekata u određenoj grupi, a prisutan je od rođenja u ljudskoj vrsti, ali i kod nekih životinjskih vrsta (Deahane, 2011). Činjenica da dojenčad i životinje posjeduju sposobnost procjene količine dokazuje da intuitivni sustav za brojeve može postojati neovisno o postojanju simboličkog sustava. ANS ima nekoliko osnovnih funkcija, a one su: 1. reprezentacija objekata koja se odvija neovisno o tome radi li se o vizualnom ili auditivnom podražaju, a odvija se unutar 100 milisekundi; 2. procjena, odnosno povezivanje količine i simbola; 3. zadržavanje u pamćenju (u radnom i u dugoročnom pamćenju); 4. grupiranje simbola prema određenim karakteristikama; 5. primjena osnovnih matematičkih operacija (zbrajanje, oduzimanje, množenje); 6. usporedba količine između dva setova (Odic i Starr, 2018). Rad ovih funkcija ovisan je o dobi pa će tako odrasle osobe biti

uspješnije u reprezentaciji i usporedbi količine između dva seta, nego što će to biti djeca u predškolskoj ili školskoj dobi. Uz dob, uspješnost funkcioniranja ANS-a ovisi o još dvije karakteristike vezane direktno uz sustav, a to su to su učinak udaljenosti i učinak veličine (Szkudlarek i Brannon, 2017). Efekt udaljenosti utječe na diskriminaciju količine na način da je lakše razlikovati dva broja koja su više udaljena, nego dva broja koja su manje udaljena (primjerice, lakše je razlikovati 3 i 9, nego, 3 i 5). Zbog učinka veličine, lakše je razlikovati manje brojeve, odnosno manje količine, nego veće (primjerice lakše je razlikovati 3 i 5, nego 53 i 55).

Dokazi za postojanje intuitivnog sustava brojeva pojavili su se razvojem novih tehnologija. Snimanjem moždane aktivnosti uz pomoć funkcionalne magnetske rezonance (fMRI), spektrografije ili evociranih moždanih potencijala (ERP) tijekom rješavanja matematičkih zadataka otvorila se mogućnost lokaliziranja intuitivnog sustava brojeva. Dio mozga koji se najviše aktivira tijekom matematičkog zaključivanja je intraparijetalni sulkus u stražnjem djelu tjemenog režnja (Odic i Starr, 2018; Deheane, 2011; Hyde i sur., 2010). Aktivacija u intraparijetalnom sulkusu pronađena je i tijekom rješavanja nesimboličkih matematičkih zadataka (primjerice procjena količine, udaljenosti i sl.) i tijekom simboličkih matematičkih zadataka (primjerice izvođenje aritmetičkih operacija, rješavanje problemskih zadataka). U prilog tome da je intuitivni sustav brojeva urođen, govori činjenica da je aktivnost u intraparijetalnom sulkusu pronađena kod djece stare samo 6 mjeseci (Hyde i sur., 2010).

Poput svakog sustava i ANS ima svoj određeni tijek razvoja koji je pod utjecajem učinka udaljenosti i učinke veličine setova. U dobi od 6 mjeseci djeca mogu uspješno razlikovati setove koji su u omjeru 1:2, i to ne samo s količinom do 4 objekta, nego i s većim količinama (set od 6 i set od 12 točkica). Međutim, kada je udaljenost između setova manja, odnosno kada su setovi u omjeru 2:3 (set od 8 i set od 12 točkica), tada ne mogu razlikovati količinu u ta dva seta (Xu i Spelke, 2000). Zajedno s općim razvojem i razvoj preciznosti ANS-a raste pa tako u dobi od 3 godine djeca uspješno razlikuju setove u omjeru 2:3, a neki razlikuju i omjere 3:4. (Halberda i Feigenson, 2008). Sa svakom idućom godinom ta se preciznost povećava, stoga sa 6 godina djeca imaju sposobnost razlikovanja setova u omjeru 5:6, a neki čak i u omjeru od 6:7. ANS se razvija sve do rane adolescencije kada je postaje nalik ANS-u odraslih osoba, odnosno kada je osoba u mogućnosti razlikovati setove u omjeru 9:10 te 10:11. Stavljanje naglaska na ANS i njegov razvoj je važno jer mnogi autori ističu da je uredan razvoj ANS-a temelj za usvajanje simboličkih matemačkih sposobnosti (Libertus, Feigenson i Halberda, 2011; Szkudlarek i Brannon, 2017). Libertus, Feigenson i Halberda

(2011) utvrdili su da je uspješnost na zadacima za ispitivanja preciznosti rada ANS-a kod djece predškolske dobi (od 3 do 5 godina) u visokoj korelaciji sa zadacima koji ispituju simboličke matematičke sposobnosti. U njihovom istraživanju su zadaci za ispitivanje preciznosti rada ANS-a uključivali su usporedbu broja plavih i žutih točkica na ekranu, dok su simboličke matematičke sposobnosti koje su bile ispitivane u ovom istraživanju uključivale verbalno brojenje objekata, usporedba dva broja, čitanje brojenja, zbrajanje, oduzimanje i rješavanje problemskih zadataka. Autori smatraju da tijekom usvajanja simboličkih matematičkih sposobnosti ANS služi kao spona koja povezuje nove matematičke sposobnosti s već urođenim sustavom za brojeve te na taj način omogućuje razumijevanje složenijih matematičkih koncepata. Prema nekim istraživanjima rad ANS-a može predvidjeti razvoj matematičkih sposobnosti u predškolskoj i u školskoj dobi. Starr, Libertus i Brannon (2013) su ispitivale djecu u dobi od 6 mjeseci, a zatim ponovo u dobi od 3,5 godine na zadacima procjene količine i na zadacima za procjenu usvojenih matematičkih vještina iz TEMA-3 testa za procjenu ranih matematičkih sposobnosti. Rezultati u dobi od 6 mjeseci su bili u visokoj korelaciji s rezultatima u dobi od 3 godine, odnosno rezultati u dobi od 6 mjeseci predvidjeli su uspješnost u preciznosti rada ANS-a kroz zadatke procjene količine, ali i uspješnost na zadacima za procjenu ranih matematičkih sposobnosti.

1.4 Matematika kao simbolički sustav

Simboličke matematičke sposobnosti podrazumijevaju matematička znanja koja se usvajaju nakon što dijete usvoji jezik. Ideju o tome da postoje dva sustava matematičkih sposobnosti, nesimbolički i simbolički, predstavili su Deheane, Piazza, Pinel i Cohen (2003). Nesimbolički matematički sustav odnosi se na intuitivni sustav za brojeve (ANS) i na manipulaciju brojeva, a njegova lokacija se nalazi u intraparietalnom sulkusu. Nesimbolički matematički sustav nije ovisan o jeziku, a njegov rad očituje se tijekom zadataka procjene količine i jednostavnih zadataka zbrajanja i oduzimanja s vizualnom podrškom. Nasuprot tome, simbolički matematički sustav, u literaturi navođen kao i „kognicija o brojevima (eng. *numerical cognition*) predstavlja matematičke konstrukcije koje su nastale temeljem jezika (Vukovic i Lesaux, 2013), a aktivan je tijekom čitanja brojeva, rješavanja operacija zbrajanja i oduzimanja bez vizualne podrške, tijekom imenovanja geometrijskih likova te tijekom rješavanja problemskih zadataka. Dokaz za povezanost simboličkog matematičkog sustava s jezikom pronađen je u aktivaciji lijeve hemisfere, točnije istovremene aktivacije lijevog

angularnog girusa i intraparietalnog sulkusa tijekom rješavanja prethodno navedenih zadataka (Deheane i sur. 2003). Simbolički matematički sustav ima dvije važne odrednice. Prva odrednica simboličkog matematičkog sustava je kognitivni razvoj. Sam naziv „simbolički“ govori da se radi o apstraktnom sustavu i kao takvom, potrebna je određena razina kognitivnog razvoja za usvajanje određenog matematičkog koncepta. Prema Piagetu, u predškolskoj dobi (od 2 do 6 godina) djeca se nalaze u predoperacionalnom stadiju kognitivnog razvoja. U predoperacionalnom stadiju dolazi do naglog razvoja kognitivnih sposobnosti, a ključno obilježje tog perioda je da dijete može predočiti kako riješiti problem, bez da izravno djeluje na okolinu oko sebe (Vasta, Haith i Miller, 1998). Djeca u ovom stadiju nisu ograničena na razmišljanje o situacijama koje se odvijaju ovdje i sada, već mogu povezati prethodno usvojena znanja s mogućim ishodima u budućnosti. Nadalje, djeca počinju usvajati kvalitativni identitet, odnosno shvaćati da predmet zadržava svoju funkciju čak i kada mu se promijeni oblik. Važno obilježje ovog stadija je da se u tom periodu odvija i nagli jezični razvoj koji omogućuje djetetu da komunicira o svojim željama, potrebama i razmišljanjima i na taj način neposredno mijenja okolinu oko sebe. Ove promjene utječu i na razvijanje matematičkih koncepata pa tako i prije samog usvajanja matematičkih pojmova, djeca razvijaju svoje matematičko razmišljanje kroz aktivnosti pridruživanja, razvrstavanja, sparivanja i nizanja (Liebeck, 1984). Pridruživanje je aktivnost u kojoj djeca odabiru zajedničke osobine predmeta. Glavno obilježje aktivnosti pridruživanje je upoznavanje s matematičkom jezikom koji je temelj za usvajanje matematike, a uključuje upoznavanje s bojama, pojmovima za veličinu i duljinu. Razvrstavanje se odnosi na rastavljanje većeg skupa u nove skupove sa zajedničkim obilježjima. Ova aktivnost je kod djece najuočljivija kod pospremanja igračaka gdje djeca, primjerice, razvrstavaju medvjediće, lutke i autića. U ciljanim aktivnostima vezanim uz matematiku, djeca mogu razvrstavati geometrijske likove ili predmete prema bojama ili funkciji. Sparivanje je aktivnost koja je temelj za razvijanje brojenja, a očituje se u pridruživanju predmeta jedan na jedan (primjerice sparivanje svake lutke za odgovarajućom haljinom, sparivanje svakog djeteta u grupi s jednom stolicom). Nizanje je najsloženija aktivnost jer dijete osim obilježja mora i činiti usporedbe između predmeta koje slaže u nizu (primjerice, slaganje štapića po duljini). Tijekom aktivnosti nizanja djeca usvajanju pojmove „prvi“, „posljednji“, „pokraj“, „između“ te na taj način usvajaju prostorne odnose, ali i stvaraju temelje za usvajanje brojevnog pravaca (Liebeck, 1984). Osim što je aktivnost nizanja preduvjet za uredan razvoj aritmetike i geometrije, nizanje zahtijeva i uočavanje određenih obrazaca. Primjerice, u zadatku gdje treba nizati jedan crveni, a zatim dva plava autića dijete se upoznaje s obrascem forme ABB, što je povezano uz

razvoj algebre. Uz ove spontane aktivnosti koje se javljaju u dječjoj svakodnevici, tijekom predškolskog razdoblja se kod djece javlja i interes za brojevima, za upoznavanjem s oblicima, za uključivanje u rješavanje problemskih zadataka s konkretnim materijalima kao što su kocke ili pijesak gdje izravno uče o mnogim matematičkim konceptima.

Druga odrednica simboličkog matematičkog sustava je usvojenost jezika. Koje jezične vještine djeca trebaju usvojiti da bi mogla razviti matematičke sposobnosti? Ponajprije, da bi brojenje kod djece bilo automatizirana radnja, da bi mogla imenovati količinu i provoditi čak i najjednostavnije aritmetičke operacije, djeca trebaju naučiti imena za brojeve. Već u dobi od dvije godine djeca počinju učiti imena brojeva i razvijati brojanje (Butterworth, 2005). No, čak i prije druge godine, djeca se susreću s određenim obilježjima matematike u jeziku. Tako od najranije dobi imaju priliku čuti da uz broj veći od jedan, riječi mijenjaju svoj morfološki oblik iz jednine u množinu (pr. jedna mačka – dvije mačke), što su djeci prvi znakovi da brojevi označavaju određenu količinu (Dehaene, 2011). Djeca u vrlo ranoj dobi usvajaju i pridjeve kao što su „neki“, „svi“, „dulje“, „kraće“, „ravno“, „zaobljeno“ te priloge kao što su „koliko“, „nekoliko“, „više“, „manje“, „jednako“ koji im omogućuju sudjelovanje u temeljnim matematičkim aktivnostima pridruživanja, razvrstavanja, sparivanja i nizanja. (Liebeck, 1984). Nadalje, kako bi mogli provoditi aritmetičke operacije uz djeca trebaju usvojiti značenje riječi „dodaj“, „oduzmi“, „ukupno“ i razumjeti sintaktičku strukturu zadatka. Usvojenost jezika posebice je važna za problemske zadatke, u kojima djeca trebaju interpretirati ono što se od njih traži, primijeniti odgovarajuću matematičku operaciju te naposljetku i verbalizirati izračun u točan odgovor. U predškolskoj dobi mnoga djeca uče i pisane simbole za brojeve. Pisanje i čitanje su jezične vještine pa je tako razumljivo da su čitanje i pisanje brojeva, a kasnije i zapisivanje drugih matematičkih simbola usko vezani uz jezik. Uz čitanje i pisanje brojeva u funkciji učenja određenih aritmetičkih operacija, čitanje i pisanje brojeva je važno i u svakodnevnom životu u vidu korištenja kalendara i satova. U prilog važnosti jezika u razvoju ranih matematičkih sposobnosti govore međukulturalna istraživanja (Deheane, 2011) kojima je otkriveno da predškolska djeca s kineskog govornog područja počinju prije brojiti automatizmom i broje automatizmom puno dalje nego što to čine djeca s engleskog govornog područja. Uzrok leži u tome što je kineski sustav brojeva verbalno lakši za naučiti od engleskog zbog jednakih morfoloških nastavaka za desetice, stotice i tisućice koji se samo dodaju na osnovne brojeve od 1 do 10 (Deheane, 2011). Spoznaje o povezanosti jezičnih i matematičkih sposobnosti su se posljednjih nekoliko godina počele isticati i u predškolskom obrazovanju, a Montague – Smith i suradnici (2018) navode

dva ključna područja koja je potrebno razvijati da bi neformalni jezik postao matematički, a to su širenje rječnika, odnosno podučavanje pojmova za opisivanje količine, oblika i veličine te razvoj komunikacije, odnosno podučavanje djece razgovorima o matematici i objašnjavanju određenih matematičkih zaključaka. Budući da svaka grana matematike ima svoje osobitosti, bilo da se radi o rječniku, aktivnostima ili razvoju specifičnom za to područje, u nastavku će biti prikazan matematički razvoj u predškolskoj dobi prema domenama aritmetike (brojenje, aritmetičke operacije, problemski zadaci), geometrije (prepoznavanja oblika i mjerenje) i algebre (obrasci).

1.5 Broj i usvajanje brojenja

Brojevi su apstraktni koncepti koje koristimo u svakodnevnom okruženju. Brojevi mogu imati više funkcija, a Montague-Smith i suradnici (2018) navode sljedeće: *označavanje količine* (informacija o tome koliko je predmeta u setu), *označavanje poretka* (primjerice, koliko je stranica u knjizi, koji sportaš je osvojio koje mjesto) te *nominalno označavanje* odnosno identificiranje predmeta u okolini uz pomoć brojeva (npr. broj autobusa, adresa). Djeca su od najranije dobi uključena u mnoge aktivnosti koje uključuju brojeve. Već u prvoj godini života imaju prilike čuti roditelje kako pjevaju brojalicu, broje prste na rukama i nogama te igračke u okolini ili pak čuju da roditelji biraju TV program pod određenim brojem (Geary, 1994). Zbog stalnog kontakta s brojevima, djeca već u dobi od dvije godine počinju učiti imena brojeva i razvijati sposobnost brojenja automatizmom (Butterworth, 2005), a usvajanje tih procesa traje cijelo predškolsko razdoblje i početak školskog razdoblja (Geary, 1994).

Da bi mogla usvojiti vještinu brojenja, djeca moraju prvo usvojiti temeljna logička načela brojenja. Načela brojanja opisali su još 1986. godine Gelman i Gallistel, a mogu se podijeliti u dvije glavne kategorije; načela „kako brojiti“ te načela „što brojiti (Montague- Smith i sur., 2018). Načela „kako brojiti“ su osnovna načela potrebna za usvajanje brojenja, a obuhvaćaju pridruživanje „jedan prema jedan“, načelo stabilnosti poretka i načelo kardinalnosti . Načelo pridruživanja „jedan prema jedan“ označava da se svakom objektu pridodaje isključivo jedan broj, stoga da bismo dobili ukupan broj objekata u određenom setu, svaki objekt u skupu možemo brojiti samo jedanput. Načelo pridruživanja „jedan na jedan“ je prvo koje djeca uočavaju pa tako u dobi od samo 18 mjeseci djeca više gledaju odrasle koji koriste to načelo u prebrojavanju, u odnosu na one koji nekoliko puta broje isti predmet (Slaughter i sur. 2011).

Načelo stabilnog poretka označava da je redoslijed brojeva nepromjenjiv te da svaki broj ima određenog prethodnika i sljedbenika. Ovo načelo počinju djeca shvaćati vrlo rano pa tako dok i nemaju usvojene sve brojeve nego koriste vlastite riječi za označavanje brojeva, uvijek to čine u određenom redoslijedu (Slaughter i sur, 2011). U dobi od tri godine, djeca imaju usvojena ova prva dva načela brojenja (Klein i Starkey, 1987; prema Vlahović Štetić i Kovačić, 1997). Iako do treće godine imaju usvojena osnovna načela brojenja i mogu uočiti neke nepravilnosti u brojenju (najčešće se do odnosi na ponavljanje broja u brojenju), prije pete godine djeca ne navode koje su se greške pojavile u brojenju drugih. Načelo kardinalnosti usvaja se nešto kasnije, točnije u dobi od četiri godine. Prema načelu kardinalnosti zadnji izgovoreni broj u nizu označava količinu seta. Smatra se da je načelo kardinalnosti usvojeno onda kada dijete nakon prebrojavanja skupa može odgovoriti na pitanja koliko ima predmeta u skupu. Važno je napomenuti da četverogodišnjaci shvaćaju kardinalnost samo za male setove i setove koji su složeni u nizu dok petogodišnjaci u potpunosti razumiju načelo kardinalnosti bez obzira na količinu i raspored objekata u setu (Sarama i Clements, 2009). Nakon što usvoje načelo kardinalnosti, djeca su u mogućnosti koristiti brojenje u svrhu određivanja količine u setu, ali i u svrhu usporedbe dva seta.

Načela „što brojiti“ odnose se na djetetovo znanje o tome za što služi brojenje, tj. što je sve moguće brojiti. Načelo apstraktnosti označava da se bilo koji elementi mogu brojiti. Posljedično tome, možemo prebrojavati i stvarne i imaginarne predmete, brojiti prema apstraktnim svojstvima kao što su boja, oblik, potpune predmete i dijelove predmeta, predmete koji se razlikuju po svojstvima, zvukove i pokrete. Istraživanje Shipley i Shepperson (1990) pokazalo je da petogodišnjaci i šestogodišnjaci mogu brojiti apstraktne elemente ako što su vrste igračaka (potpuno različite igračke, kao i igračke koje su se razlikovale po jednom svojstvu; npr. ovdje je bilo nekoliko vrsta brodova) i boje, dok trogodišnjaci i četverogodišnjaci broje sve elemente u setu, bez obzira na zadana svojstva. Novija istraživanja su pokazala da već i trogodišnjaci mogu brojiti prema apstraktnim svojstvima pa su tako u istraživanju Giralta i Blooma (2000) trogodišnjaci bili uspješni u brojenju prema boji i u brojenju dijelova predmeta. Prema načelu nevažnosti redoslijeda, možemo početi brojiti od bilo kojeg objekta u setu, a da konačni rezultat ostane isti. U početku usvajanja vještine brojenja, djeca su uspješni samo ako broje objekte s lijeva na desno i ako su oni složeni u nizu. U dobi od pet godina djeca mogu započeti prebrojavanje objekata od bilo kojeg objekta u setu i točno odrediti količinu objekata u setu (Sarama i Clements, 2009).

Za razliku od načela koje su opisali Gelaman i Gallistel, Vlahović-Štetić i Vizdek Vidović (1998) navode 7 načela brojenja, a to su: 1.načelo pridruživanja „jedan prema jedan“; 2.načelo kardinalnosti; 3. načelo ordinalnosti; 4.načelo izmjerljivosti; 5.načelo konzervacije; 6.načelo tranzitivnost; 7. načelo reverzibilnosti. Načelo ordinalnosti označava da su brojevi poredani prema uzlaznom nizu veličine (2 je veće od 1, 3 je veće od 2 i sl.). Djeca koja imaju usvojeno ovo načelo mogu u nizu pokazati koji je predmet po redu prvi, drugi, treći itd. Usvojenost načela ordinalnosti, vezana je uz nizanje brojeva pa tako djeca koja imaju usvojeno ovo načelo mogu odrediti koji broj od dva zadana broja je veći, a to se obično usvaja između četvrte i pete godine. Poznavanje ovog načela vidljivo je i kroz imenovanje brojeva koji dolaze nakon, odnosno prije zadanog broja. Preduvjet za točno imenovanje je stvaranje mentalnog brojevnog pravca. Ovaj proces odvija se tijekom pete godine pa tako dio petogodišnjaka i svi šestogodišnjaci mogu točno odrediti koji broj dolazi nakon, a koji prije zadanog broja. Osim toga, šestogodišnjaci mogu odrediti koji brojevi su bliži, odnosno, koji udaljeniji od zadanog broja (Sarama i Clements, 2009). Prema načelu izmjerljivosti predmeti se mogu uspoređivati ako se prilikom usporedbe koriste iste mjerne jedinice. Načelo konzervacije odnosi se na to da bez obzira na promjenu rasporeda predmeta u skupu, broj predmeta u skupu ostaje nepromijenjen. Djeca rane predškolske dobi ne razumiju ovo načelo pa tako u usporedbi dva niza koja imaju istu količinu, no različit raspored objekata, označe kao veći niz onaj koji se vizualno čini veći. Ovo načelo djeca počinju usvajati krajem predškolskog razdoblja, odnosno tijekom šeste godine. Usvajanje načela konzervacije jedan je od procesa koji obilježava prijelaz djece iz predoperacijskog razdoblja kognitivnog razvoja u razdoblje konkretnih operacija (Vasta, Haith i Miller,1998). Načelo tranzitivnosti govori o odnosima između više predmeta. Prema ovom načelu, pravilo je da ako je neka količina A veća od količine B, a B je veća od C, posljedično tome je da količina A mora biti veća i od količine C. Načelo reverzibilnosti odnosi se na znanje o tome koje promjene utječu na promjenu količine, a koje ne. Konkretno, to se odnosi na znanje da se dodavanjem ili oduzimanjem predmeta količina predmeta u setu mijenja, dok se promjenom rasporeda (jednako je ako je u setu 3 plave i 2 žute loptice, kao i ako su u setu 2 plave i 3 žute loptice) količina ne mijenja. Posljednja četiri načela ne utječu izravno na uspješnost u postupku brojenja, osim u situacijama kada se mijenja udaljenost ili prostorni raspored predmeta u skupu. U dobi od pet godina većina djece urednog razvoja usvaja svih pet načela brojanja koja su naveli Gelman i Gallistel (Vlahović Štetić i Kovačić, 1997), dok se načela konzervacije, tranzitivnosti, reverzibilnosti i izmjerljivosti počinju usvajati krajem predškolskog razdoblja, odnosno sa šest godina, a njihov razvoj se nastavlja do osme godine. U predškolskom

razdoblju djeca sva djeca urednog razvoja usvoje brojenje do 20, a neka čak i nauče brojiti do 100 (Geary, 1994). Osim vještina brojenja automatizmom i prebrojavanja seta, djeca nauče brojiti unatrag i brojiti prema sekvencama. Petogodišnjaci tako znaju brojiti unatrag od 10 a šestogodišnjaci nauče brojiti unatrag od 20 te brojiti samo parne ili samo neparne brojeve. Uz to, u petoj godini djeca nauče brojiti od zadanog broja i brojiti u zadanom intervalu (Srama i Clements, 2009). Brojenje od određenog broja te brojenje unatrag pomaže u razvijanju strategija za početne operacije zbrajanja i oduzimanja. Uz to, neki šestogodišnjaci mogu naučiti brojiti prema sekvencama od 5 ili 10 što su preduvjeti za usvajanje tablice množenja u školskom razdoblju (Montague - Smith i sur., 2018). Uz usvajanje imena brojeva i vještinu brojenja, djeca predškolske dobi nauče i čitati brojeve, a mnoga djeca znaju i pisati neke brojeve. Čitanje brojeva je vještina koja se počinje usvajati nakon četvrte godine, a proteže se sve do kraja predškolskog razdoblja i do rane školske dobi (Benoit, Lehalle, Molina, Tijus i Jouen, 2013). Kao i u verbalnom brojenju i u čitanju djeca prvo počinju usvajati manje brojeve, a zatim veće. Većina šestogodišnjaka može imenovati sve brojeve od 1 do 10, a dio šestogodišnjaka nauči i čitati brojeve između 10 i 20.

1.6 Aritmetičke operacije

Iako već dojenčad u dobi od pet mjeseci uočava nepravilnosti u rezultatima zbrajanja i oduzimanja, razumijevanje operacija zbrajanja i oduzimanja usvaja se tijekom predškolskog razdoblja. Prvi korak u ovom procesu je da dijete shvati da dodavanje objekata utječe na povećanje seta, odnosno da oduzimanje objekata smanjuje ukupan broj objekata u setu. Ovu sposobnost počinje se razvijati u dobi od dvije godine i nije vezana uz usvojenost brojenja ili uporabu brojeva (Bisanz, Sherman, Rasmussen, Ho, 2005). Upravo zbog toga što nije vezana izravno uz uporabu brojeva, dvogodišnjaci nisu u mogućnosti točno riješiti zadatke zbrajanja 1+1, ili zadatke oduzimanja 2-1. Tijekom treće godine, nakon što usvoje osnovna načela brojenja, djeca mogu provoditi najjednostavnije neverbalne zadatke zbrajanje i oduzimanja uz uporabu predmeta iz okoline. Ti zadaci odnose se na zbrajanje i oduzimanje za 1 u setovima koji sadrže od 1 do 4 objekata (Sarama i Clements, 2009). U četvrtoj godini kod djece dolazi do razvoja znanja o brojevima na više razina, što posljedično utječe a razvoj aritmetičkih operacija. Većina četverogodišnjaka zna brojiti do 10, što im omogućuje računanje sa setovima koji sadrže veći broj objekata. Nadalje, u toj dobi djeca usvajaju načelo kardinalnosti zbog čega mogu precizno odrediti početni broj predmeta u setu i broj predmeta

nakon promjene količine u setu. Rezultat ovih promjena je da između četvrte i pete godine djeca počinju koristiti znanje o brojevima i vještinu verbalnog brojenja kako bi razvila strategije za rješavanje verbalnih zadataka zbrajanja i oduzimanja (Geary, 2006).

Dvije osnovne vrste strategija koja djeca koriste su *brojenje i dosjećanje* (Bisanz i sur., 2005). Strategije brojenja počinju se koristiti prve, a obuhvaćaju verbalno brojenje uz pomoć prstiju ili konkretnih predmeta iz okoline. Strategije brojenja razlikuju se s obzirom na vrstu aritmetičke operacije pa tako postoje strategije zbrajanja i strategije oduzimanja (Vlahović-Štetić i Vizek Vidović, 1998). Strategije zbrajanja obuhvaćaju: 1.prebrojavanje svih članova u skupu, 2. nastavljanje brojenja od prvog pribrojnika, 3, strategiju „pribrajanja manjeg“, 4.kombinaciju dosjećanja i strategije, 5.strategiju dosjećanja.. Temelj prve tri strategije je brojenje unaprijed od određenog broja. Prebrojavanje svih članova u skupu odnosi se na strategiju u kojoj djeca prvo prebroje jedan skup, zatim drugi uz istovremeno podizanje prstiju i na kraju prebroji sve prste kako bi dobilo konačan rezultat. Iduća strategija se koristi tako da dijete odmah podigne broj prstiju koji odgovara broju predmeta u prvom skupu, a zatim na to nastavi podizati prste jedan po jedan uz brojenje od posljednjeg broja iz prvog skupa. U strategiji „pribrajanja manjeg“ dijete prvo podiže broj prstiju koji odgovara većem pribrojniku, bez obzira na to je li taj pribrojnik bio zadan prvi ili ne, a zatim podiže prste za drugog pribrojnika uz brojenje od posljednjeg broja iz prvog skupa. Kombinacija dosjećanja i strategije obično se koristi tijekom računanja s većim brojevima. Pritom se dio zadatka rješava uz korištenje jedne od strategija (primjerice strategije pribrajanja manjeg), a dio uz prizivanje informacija iz dugoročnog pamćenja. Posljednja strategija, strategija dosjećanja, uključuje na prizivanje informacija iz dugoročnog pamćenja. Temelji strategija oduzimanja su brojenje unatrag (oduzimanja (Vlahović-Štetić i Vizek Vidović, 1998). U ovoj kategoriji, kako navode autorice, nalaze se četiri strategije, a one su: 1.strategija umanjivanja, 2.strategija uvećavanja, 3.izborna strategija i strategija dosjećanja. Strategija umanjivanja označava da dijete odbrojava unatrag od početne količine uz pomoć prstiju. Strategija uvećavanja se koristi tako da dijete krene brojiti od manjeg broja (umanjitelj) i broji uz pomoć prstiju dok ne dođe do većeg broja (umanjenik) te tada zaključi koliko mu je trebalo da dođe od umanjitelja do umanjenika. Izborna strategija označava da dijete ovisno o zadatku bira koju će od prethodne dvije strategije koristiti. Strategija dosjećanja istovjetna je strategiji dosjećanja iz kategorije strategija zbrajanja, dakle, odnosi se na prizivanje informacija iz dugoročnog pamćenja. Većina djece predškolske i rane školske dobi tijekom zbrajanja koristi strategiju pribrojavanja manjeg broja, a tijekom oduzimanja izbornu strategiju (Vlahović Štetić i Vizek Vidović,

1998). Strategija dosjećanja je naprednija i mogu ju koristiti samo ona djeca koja su automatizirala zbrajanje i oduzimanje do 10, stoga se ova strategija rijetko koristi u predškolskoj dobi. Ona se obično razvija u školskom razdoblju, iako već neki šestogodišnjaci mogu uspješno koristiti ovu strategiju (Bisanz i sur., 2005). Razvoj navedenih strategija je važan jer o njemu ovisi koliko će djeca biti uspješna u rješavanju pojedinih aritmetičkih zadataka.

Kao što je već spomenuto, djeca između četvrte i pete godine oslanjaju se na strategiju prebrojavanja svih članova u skupu. Iz tog razloga im je tijekom zadataka zbrajanja i oduzimanja potrebna vizualna podrška u obliku predmeta i slikovnih predložaka kako bi bili uspješni u određivanju konačnog rezultata. Budući da u toj dobi ne znaju sva djeca brojiti do 20 i iznad 20, većina djece može provoditi operacije zbrajanja i oduzimanja samo za setove do 10 objekata. Tijekom pete godine djeca nauče brojiti od određenog broja zbog čega mogu računati brže i preciznije koristeći nastavljanja brojenja od prvog pribrojnika ili strategiju „pribrajanja manjeg“ tijekom zadataka zbrajanja (Sarama i Clements, 2009). U ovoj dobi djeca također počinju brojiti unatrag od 10 zbog čega mogu koristiti strategiju umanjivanja i strategiju uvećavanja. Osim što korištenje ovih strategija omogućuje brže rješavanje aritmetičkih operacija, djeca koja koriste ove strategije mogu pronaći i broj koji nedostaje u zadanoj operaciji (primjerice 2 + __ = 5 ili 5 - __ =2). Djeca između pete i šeste godine razvijaju sposobnost rješavanja jednostavnih zadataka zbrajanja i oduzimanja i u zadacima u kojima nedostaje broj u zadanoj operaciju, a osim toga usvojene strategije koriste i tijekom rješavanja problemskih zadataka.

1.7 Problemski zadaci

Problemski zadaci se najčešće opisuju kao zadaci riječima u kojima je potrebno riješiti određeni problem. Za razliku od zadataka brojevima u kojima dijete treba samo izračunati rezultat na temelju zadanih brojeva, problemski zadaci oslanjaju se na interpretaciju zadatka i sastoje se od nekoliko koraka koji prethode samom izračunu (Pavlin-Bernardić, Rovan i Vlahović Štetić, 2011). Ponajprije, za uspješno rješavanja zadatka dijete treba razumjeti tekst. Nakon toga potrebno je identificirati problem. Sljedeći korak je razvijanje strategije za rješavanje zadataka te, naposljetku, provedba te strategije i rješavanje zadatka. Razumijevanje brojeva i brojenja, koje se počinje odvijati između četvrte i pete godine, temelj je za

rješavanje jednostavnijih problemskih zadataka (Klasnić, 2009). Međutim, u toj dobi je za rješavanje problemskih zadataka djeci potrebna podrška. Do polaska u školu djeca mogu samostalno rješavati jednostavnije problemske zadatke, a kroz školsko razdoblje ova se vještina uvježbava.

Na uspješnost rješavanja problemskih zadataka osim dobi utječu i drugi faktori, kao što su duljina zadatka i semantička struktura zadatka. Dulji problemski zadaci će djeci stvarati više poteškoća jer će sadržavati više informacija koje djeca moraju obraditi i pravilno interpretirati kako bi mogla uspješno i točno riješiti zadani zadatak. Semantička struktura obuhvaća rječnik korišten u problemskom zadatku i odnose među rečenicama u zadatku. Na temelju semantičke strukture Riley, Greeno i Heller (1984) izdvojili su četiri kategorije problemskih zadataka. Prva kategorija su *zadaci promjene*. U ovoj kategoriji nalaze se zadaci u kojima se pojavio neki događaj koji je doveo do povećanja ili smanjenja početne količine u setu. U idućoj kategoriji nalaze se *zadaci kombiniranja*. U tim zadacima zadana su dva različita skupa koje je potrebno ujediniti u veći skup. Treća kategorija je kategorija *zadataka usporedbe*. Zadaci usporedbe postavljeni su tako da postoje dva nepromjenjiva skupa koje je potrebno usporediti, odnosno između kojih je potrebno pronaći razliku. Posljednja kategorija problemskih zadataka su *zadaci izjednačavanja*. Cilj zadataka izjednačavanja je promijeniti količinu u jednom od dva zadana skupa kako bi oba skupa nakon promjene imala jednaku količinu. Prve dvije kategorije problemskih zadataka najlakše su za rješavanje, pa ih tako uspješno rješavaju i djeca predškolske (Geary, 1994) i rane školske dobi (Pavlin-Bernardić, Rovan i Vlahović Štetić, 2011). Nasuprot tome, zadaci usporedbe su se pokazali teškima i za djecu predškolske i za djecu školske dobi.

Kod djece predškolske dobi potrebno je koristiti konkretne predmete kojima djeca mogu manipulirati kako bi uspješno riješili zadane zadatke (Liebeck, 1984). Neka djeca predškolske dobi nauče učinkoviti koristiti strategije zbrajanja i oduzimanja, stoga ove zadatke rješavaju uz pomoć prstiju. Za razliku od njih, djeca rane školske dobi mogu rješavati ove zadatke bez podrške predmeta iz okoline, iako je u početku susreta s ovim zadacima kod neke djece potrebna uporaba strategija brojenja. S povećanjem iskustva u rješavanju zadataka djeca umjesto strategija brojenja, koriste strategije dosjećanja. Uz to, češće susretanje za zadacima ovog tipa omogućuje djeci da uoče obrasce kako su zadaci postavljeni i kako ih rješavati, stoga postaju brža i uspješnija u rješavanju istih. Osim korištenja naprednijih strategija, djeca školske dobi uspješnija su od djece predškolske dobi zbog boljeg poznavanja jezika i razvijenijeg radnog pamćenja. Budući da su početni koraci u rješavanju problemskih

zadataka razumijevanje i interpretacija jezično postavljenog zadatka, očekivano je da će djeca koja imaju razvijenije jezično znanje biti uspješnija u rješavanju ovih tipova zadataka. Promjena u kapacitetu radnog pamćena također je važna jer omogućuje dulje zadržavanje ključnih informacija iz zadatka. Naposljetku, starija djeca imaju i veće znanje o svijetu i mogu stvarati sheme za uspješno rješavanje zadataka.

1.8 Prepoznavanje oblika

U područje geometrije pripada znanje o geometrijskim likovima u ravnini i geometrijskim tijelima u prostoru, prostorno mišljenje i mjerenje veličina. Djeca su već u vrlo ranoj dobi okružena raznim geometrijskim likovima i tijelima pa tako za dojenčad postoje didaktičke igračke u kojima je cilj da dijete stavi određeni oblik u odgovarajuću rupu na kutiji ili da uparuje oblike na neki drugi način. Kroz rano djetinjstvo poimanja o oblicima se mijenjaju. U najranijoj dobi, djeca se nalaze u *fazi predprepoznavanja* (*eng. prerecognition*). U ovoj fazi djeca se susreću s raznim oblicima, ali ne mogu identificirati i razlikovati vrste geometrijskih likova (Clements i Sarama, 2000). Faza predprepoznavanja karakteristična je da djecu koja od prve do treće godine života. Kada počinju prepoznavati i imenovati jednostavne geometrijske likove, djeca ulaze u *fazu vizualizacije, odnosno fazu prepoznavanja* (van Hiele 1986; prema Halat i Dağlı, 2016). Glavno obilježje ove faze je da djeca ne uočavaju detalje koji su karakteristični za određeni oblik (primjerice da zakrivljene linije čine krug, da trokut ima tri vrha) već geometrijske likove pamte kao cjeline te ih uparuju s poznatim predmetima iz okoline (primjerice uočavaju da pravokutnici izgledaju kao vrata). Djeca se u fazi prepoznavanja geometrijskih likova nalaze tijekom predškolske dobi, točnije između treće i šeste godine, pa tako bez poteškoća imenuju i razvrstavaju oblike ako odgovaraju prototipnim primjerima krugova, trokuta, kvadrata i pravokutnika. Međutim, ako su im ponuđeni likovi koji se po nekom svojstvu razliku od prototipnih primjera, djeca predškolske dobi ih ne prepoznaju kao jedne od osnovnih geometrijskih likova (Aktas i Aslan, 2010). Na uspješnost prepoznavanja geometrijskih likova također utječe i vrsta oblika. Prvi oblik koji djeca prepoznaju, je krug. Više od 90% djece predškolske dobi prepoznaje i imenuje krug (Sarama i Clements, 2008). Između 80 i 90% djece prepoznaje i imenuje kvadrat. U imenovanju trokuta i pravokutnika su manje uspješni pa tako trokut imenuje oko 60%, a pravokutnik više od 50% djece predškolske dobi (Sarama i Clements, 2008).

1.9 Mjerenje

Mjerenje je važan dio matematičkog mišljenja jer povezuje geometriju s aritmetikom (Sarama i Clements, 2009). Kada se govori o mjerenju, prve asocijacije su mjerenje duljine ili visine te usporedbe istih. Međutim, sposobnost mjerenja vezana je uz mnoga druga područja pa tako uključuje mjerenje: duljine (uključujući visinu, širinu i dubinu), težine, kapaciteta (koliko je nečega), površine, volumena, vremena, temperature, kutova, novaca i složenih mjera kao što su brzina ili potrošnja goriva (Montague-Smith i sur., 2018). Mjerenja kod djece mogu se podijeliti na dvije razine. Prva razina je *izranjajuće mjerenje* gdje djeca počinju raditi prve procjene o veličinama u prostoru. Druga razina je *napredno mjerenje* gdje djeca usvajaju pojmove za usporedbe veličina, koriste razne instrumente za točno mjerenje i razvijaju vještine procjene veličina (MacDonald, 2011). Prva mjerenja koja djeca čine su mjerenja veličine. Već u dobi od dvije godine, djeca počinju označavati predmete u okoline kao velike i male, međutim u toj dobi još ne čine usporedbe među objektima. Tijekom treće godine, djeca počinju razvijati standarde kojima procjenjuju veličinu. Tri su glavna standarda na koja se djeca oslanjaju. Prvi je *perceptivni standard* gdje se veličina procjenjuje vizualno, često u odnosu na neki drugi predmet u okolini. Drugi standard je *normativni standard* gdje djeca uspoređuju objekt s mentalnom predodžbom o tome što oni smatraju velikim, odnosno malim. Treći standard je *funkcionalni standard* prema kojem određuju odgovara li određena veličina referentnom objektu (Sarama i Clements, 2009). Uz spomenute standarde, važnu ulogu u usporedbi veličina ima usvajanje odgovarajućeg rječnika. Tako već u trećoj godini, nakon što usvoji pojmove „veliki“ i „mali“ dijete može poredati objekte prema veličini, čak i ako mu oni nisu vidljivi (Sarama i Clements, 2008). Nakon četvrte godine djeca počinju shvaćati da se prilikom mjerenja osim na perceptivne znakove mogu oslanjati na konkretne objekte. Po uzoru na odrasle počinju uzimati objekte, kao što je primjerice štapić, kako bi izmjerili duljinu nacrtanog lika ili slamke kako bi izmjerili koliko soka ima u jednoj, a koliko u drugoj čaši. Slične metode koriste i za usporedbu veličina pa tako stave bojice jednu kraj druge da vide koja je dulja ili pak pokraj crteža stave bojicu kao referentni okvir da vide koliko je određeni lik viši ili niži u odnosu na bojicu. Osim toga, rječnik djece se širi pa mogu izražavati i verbalno odnose među predmetima u okolini. Razumijevanje mjerenja i usporedbe najviše je vidljivo kroz dječje crteže u kojima djeca jasno pokazuju usvojenu vještinu mjerenja na nekoliko razina. MacDonald (2010) navodi da više od 90% djece u dobi između četvrte i šeste godine razumije da je glavna svrha mjerenja usporedba karakteristika predmeta te uspoređuje objekte kroz smještaj na papiru, ali i kroz prikladan rječnik za izražavanje mjera.

Primjerice, većina djece može objasniti koji lik na papiru je visok, koji je nizak te koji lik je niži u odnosu na zgradu, odnosno koji lik je viši. Osim u svrhu usporedbe, djeca koriste mjerenje kako bi i poredala objekte prema određenoj karakteristici. Tako mnoga djeca na crtežima poredaju likove prema visini ili duljini, pri čemu u interpretaciji crteža navode koji lik je visok, koji je viši, a koji je najviši u odnosu na prvog lika (Chigeza i Sorin, 2016). Važno je napomenuti da uz usporedbe na temelju fizičkih karakteristika kao što su visina, duljina ili težina, djeca uspoređuju i količine. U početku se u usporedbi količina oslanjaju na intuitivno znanje, odnosno na procjenu, međutim nakon što svladaju načelo kardinalnosti, mnoga djeca koriste brojenje kako bi precizno odredila koji skup ima više objekata.

1.10 Matematički obrasci

Matematički obrasci definiraju se kao sekvence koje imaju predvidljive pravilnosti u logičkim, prostornim ili brojevnim odnosima (Mulligan i sur, 2009). Tri su glavne vrste obrazaca (Montague-Smith i sur, 2018). Prva vrsta su *ponavljajući obrasci* u kojem se sekvence javljaju uvijek prema istom redoslijedu. Ponavljajući obrasci mogu biti linearni, odnosno složeni u nizu ili nelinearni. Sljedeća vrsta su *rastući obrasci*. U rastućim obrascima su elementi obrasca u takvom odnosu da se idući oblik veličinom ili količinom povećava ili smanjuje. Posljednja vrsta su *simetrični obrasci*. Oni nastaju kroz refleksiju i rotaciju, a često se mogu naći u prirodi, i okolini. Djeca predškolske dobi su okružena obrascima u svakodnevnim aktivnostima. Često se može primijetiti kako djeca u igri spontano koriste obrasce. Najbolji primjer toga je aktivnost slaganja kockica. Osim toga, djeca koriste obrasce prilikom crtanja, spremanja igračaka, igra autićima i slično. Zbog spontanog korištenja obrazaca, ali i prepoznavanja obrazaca kod drugih koje je prisutno kod sve djece svijeta, Sarama i Clements (2009) smatraju da je prepoznavanje obrazaca urođena vještina. Prva vrsta obrazaca koju djeca usvajaju su ponavljajući obrasci. U početku su to obrasci koji sadrže dva elementa koji se razlikuju prema veličini, boji ili obliku (Rittle-Johnson i sur., 2015). Trogodišnjaci mogu kopirati najjednostavnije obrasce, iako u toj dobi još ne razumiju kako se obrasci tvore. U dobi od četiri godine djeca počinju shvaćati način na koji obrasci nastaju te pokazuju to kroz četiri različite razine. Prva razina je *kopiranje obrazaca* po uzoru na zadani obrazac. Druga razina je *produljivanje postojećeg obrasca*. Treća razina obuhvaća uočavanje pravilnosti u strukturi zadanog obrasca i *prijenos strukture na novi obrazac*. Primjerice u prvom obrascu je zadan niz od dva plava i dva žuta trokuta, a dijete mora stvoriti novi niz od

krugova. Uočavanje i prijenos strukture dijete čini kada krugove složi prema istim bojama kao u prvom nizu. Posljednja razina je razina u kojoj dijete može *izdvojiti najmanju jedinicu* obrasca. Prve dvije razine četverogodišnjaci provode bez ikakvih poteškoća. Treću razinu manji dio četverogodišnjaka provodi, no većini djece je potrebna podrška (Rittle Johnson, Fye i McLean, 2013). Razinu izdvajanja najmanje jedinice obrasca dostižu tek djeca u dobi od šest godina S povećanjem dobi, osim razumijevanja viših razina, djeca razumiju i obrasce koji sadrže više od dva elementa. Tako petogodišnjaci mogu dovršiti, kopirati i produljiti obrasce koji sadrže tri elementa oblika ABB, a šestogodišnjaci dovršavaju, kopiraju i produljuju obrasce koji sadrže četiri elementa u obliku AABB (Sarama i Clements, 2009). Uz vizualne obrasce, djeca između četvrte i šeste godine uočavaju i obrasce u zvuku i pokretima zbog čega mogu naučiti nizove od nekoliko različitih pokreta (Sarama i Clements, 2008). Rastuće i simetrične obrasce djeca spontano koriste u vlastitoj igri, no razumijevanje istih postižu tek u školskoj dobi. Iako usvajanje obrazaca nije jedan od matematičkih koncepata koji se poučava u predškolskom razdoblju, ove vještine su bitne jer su povezane s drugim matematičkim domenama. Tako su novija istraživanja pokazala da je sposobnost razumijevanja i korištenja obrazaca prediktivna za uspjeh na zadacima koji ispituju matematička znanja iz domene aritmetike kao što su brojenje i jednostavne aritmetičke operacije te iz domene geometrije, odnosno, prostornog mišljenja (Rittle – Johnson, Zippert i Boice, 2018).

2 CILJ I SVRHA RADA

Cilj ovog rada je ispitati tri skupine djece predškolske dobi (od 4, 5 i 6 godina) kako bi se utvrdilo postoje li razlike u usvojenosti određenih matematičkih znanja između ove tri dobne skupine. Izdvojit će se zadaci koje sve tri skupine uspješno rješavaju te zadaci u kojima postoje najveće razlike između skupina. Svrha ovog rada je prikupljanje informacije o tome što predstavlja uredan razvoj matematičkih koncepata u predškolskoj dobi u Hrvatskoj kako bi se na temelju ovih rezultata moglo oblikovati predškolske programe usmjerene na poticanje usvajanja matematičkih znanja važnih za kasnije učenje matematike kako bi se u ranoj dobi mogla izdvojiti djeca rizična za nastanak diskalkulije sa svrhom pružanja odgovarajuće podrške.

3 PROBLEM I PRETPOSTAVKE ISTRAŽIVANJA

U Hrvatskoj postoji manjak istraživanja koja su usmjerena na sve domene ranog matematičkog razvoja. Razine matematičkih znanja koja se očekuju kod djece u dobi od četiri, pet i šest godina nisu jasno određene u predškolskim programima niti je svijest o njima prisutna kod značajnog dijela roditelja. Posljedično, djeca koja u predškolskoj dobi pokazuju određena odstupanja u ovom području, ne bivaju prepoznata. Zbog toga su se ovim radom nastojali prikupiti podaci koji daju uvid u razinu usvojenosti matematičkih znanja djece predškolske dobi i u postojanje razlika u tim znanjima između skupina četverogodišnjaka, petogodišnjaka i šestogodišnjaka.

Sukladno problemu istraživanja i podacima iz literature, postavljene su sljedeće pretpostavke:

P1: Postojat će statistički značajne razlike u uspješnosti rješavanja zadataka između skupina djece u dobi od četiri, pet i šest godina u sljedećim kategorijama:

- ***Broj i usvajanje brojenja*** na varijablama: automatizirano brojenje do 30, kardinalnost, prebrojavanje skupa, prepoznavanje grešaka, ordinalnost – druga skupina zadataka , konzervacija – ista količina, brojenje od zadanog broja i u intervalu,brojenje unatrag od 10, brojenje po sekvencama čitanje brojeva te uparivanje količine i simbola
- ***Aritmetičke operacije***
- ***Problemski zadaci***
- ***Matematički obrasci*** na varijablama: obrasci s tri i obrasci četiri elementa
- ***Ukupni rezultat***

P2: Šestogodišnjaci će biti najuspješniji u rješavanju zadataka.

4 METODE ISTRAŽIVANJA

4.1 Uzorak ispitanika

U istraživanju je sudjelovalo devedesetero djece koja pohađaju redovni predškolski program DV Zapruđe u Zagrebu. Od ukupnog broja djece iz vrtića, izdvojena su djeca koja nisu odgovarala ciljanom uzorku zbog preniske ili previsoke kronološke dobi ili zbog nalaza i procjena koji govore o postojanju kognitivnih odstupanja ili komunikacijskih i jezično – govornih teškoća. Tako su za potrebe istraživanja izdvojena samo djeca urednog razvoja koja su bila u dobi od četiri do šest godina. Ispitanici su bili podijeljeni u tri skupine prikazane u tablici 1.

Tablica 1: Uzorak ispitanika

	četverogodišnjaci	petogodišnjaci	šestogodišnjaci
N (broj ispitanika)	30	30	30
KD (prosječna kronološka dob)	4,04	5,04	6,03

4.2 Način ispitivanja

Preduvjet za sudjelovanje u ispitivanju bio je potpisani pristanak roditelja svakog djeteta. Svako dijete je izdvojeno iz grupe te ispitano individualno u prostorima vrtića. Prosječno trajanje ispitivanja bilo je 20 minuta.

4.3 Mjerni instrumenti – opis zadataka korištenih u istraživanju i njihovo bodovanje

Za potrebe provedbe ovog istraživanja osmišljen je set zadataka prema uzoru na zadatke koji se koriste u stranim testovima procjenu matematičkih znanja kod djece predškolske dobi (Purpura i Lonigan 2015; van de Rijt, van Luit i Pennings, 1999; van Luit, van de Rijt i Hasemann, 2001; Weiland, Wolfe, Hurwitz, Clements, Sarama i Yoshikawa 2012). Mjerni instrument je sadržavao ukupno 62 zadatka koja su bila podijeljena u 15 kategorija i poredana

prema težini zahtjeva koji se stavlja pred ispitanike. Maksimalni rezultat koji su ispitanici mogli ostvariti iznosio je 76 bodova. U prilogu 1 nalaze se primjeri svih zadataka.

Opis zadataka:

Kategoriju **razvrstavanja** činili su zadaci od 1 do 4. Ispitanici su na stolu imali trokute, krugove i kvadrate koji su se razlikovali prema boji i veličini te kutiju u koju su na zadani nalog morali spremiti imenovane predmete. Prvi je cilj ove kategorije zadataka bio vidjeti koje geometrijske likove djeca poznaju. Drugi je cilj ispitivao uspješnost u razvrstavanju prema zadanim obilježjima. U prvom zadatku ispitanici su morali staviti u kutiju predmete prema jednom zadanom obilježju. Drugi i treći zadatak ispitivali su razvrstavanje prema dva zadana obilježja. Posljednji zadatak iz te kategorije ispitivao je razvrstavanje prema tri zadana obilježja. Za svaki točno imenovani geometrijski lik ispitanici su dobili 1 bod. Broj se bodova u prepoznavanju likova zbrajao pa je tako ukupni rezultat na ovoj kategoriji iznosio od 0 do 3. Na isti se način bodovao svaki zadatak razvrstavanja, čiji su se rezultati također zbrajali pa je ovdje bilo moguće ostvariti od 0 do 4 bodova.

Iduća kategorija bila je kategorija **kardinalnosti.** U njoj su se nalazili zadaci pod brojevima od 5 do 7. Cilj je ove skupine zadataka bio provjeriti imaju li djeca usvojeno načelo kardinalnosti, odnosno znaju li nakon prebrojavanja objekata u setu imenovati koliko je ih je ukupno. Za svaki točan zadatak mogli su dobiti jedan pod pa je tako ukupan broj bodova u ovoj skupini zadataka bio u rasponu od 0 do 3.

Sljedeću je kategoriju pod nazivom **prebrojavanje skupa** činio samo zadatak broj 8. U njemu su ispitanici dobili uputu da prebroje manji skup objekata koji se nalazio unutar većeg skupa. Ako su točno izdvojili broj objekata u manjem skupu, dobili su 1 bod. Ako su pogrešno prebrojili, dobili su 0 bodova.

Kategorija **usporedbe količine** sadržavala je zadatke pod brojevima od 9 do 11. Cilj je bio da ispitanici odrede koji od dva lika na slikama ima više predmeta. Ispitanicima nije dana uputa na koji način moraju odrediti koji lik ima više objekata, stoga su samostalno mogli odabrati hoće li činiti uspoređivanje kroz procjenu količine ili prebrojavanja. Ako su ispravno usporedili, dobili su 1 bod pa je tako i u ovoj kategoriji moguć broj bodova iznosio od 0 do 3.

Kategoriju **brojenja** činili su zadaci pod brojevima od 12 do 17. Zadatak 12 ispitivao je automatizirano brojenje do 10. Cilj 13. zadatka bio je provjeriti mogu li ispitanici brojiti od zadanog broja nadalje. U idućem je zadatku cilj bio ispitati znaju li ispitanici brojiti u

određenom intervalu. Cilj je 15. zadatka bio ispitati imaju li ispitanici usvojeno brojenje do 30. Posljednji zadatak iz ove kategorije ispitivao je brojenje po sekvencama, odnosno verbalno brojenje parnih brojeva. Svaki od ovih zadataka, osim zadataka brojenja do 30 bodovan je s 1 ili 0, a rezultati su obrađeni za svaki zadatak zasebno. Zadatak brojenja do 30 imao je raspon od 0 do 3 boda; 0 ako nisu znali brojiti dalje od 10; 1 ako su brojili do nekog broja između 10 i 20; 2 ako su brojili do 20 i 3 ako su brojili do 30.

Kategoriju zadataka u kojoj se ispitivalo **čitanje brojeva** činio je zadatak broj 18. Cilj ovog zadatka bio je da ispitanici pročitaju osam brojeva s predloška. Oni su ostvarili 2 boda ako su točno imenovali sve brojeve s predloška, 1 bod ako su imenovali samo neke brojeve i 0 bodova ako nisu imenovali nijedan broj.

Kategorija **pridruživanja** sadrži sedam zadataka, podijeljenih u dvije manje skupine. Prva manja skupina imala je tri zadatka (zadaci od 19 do 21) u kojima je cilj bio da ispitanici upare broj objekata na slikovnom predlošku s odgovarajućim brojem točkica. Za svaki zadatak mogli su dobiti 1 bod pa je u toj skupini mogući broj bodova iznosio od 0 do 3. Drugu su skupinu činili zadaci pod brojevima od 22 do 26 u kojima je cilj bio da ispitanici uoče da postoji nejednak broj točkica i naslikanih objekata. Za svaki točan odgovor ostvarili su 1 bod. U toj je skupini raspon bodova od 0 do 4.

Iduća kategorija ispitivala je usvojenost **ordinalnosti,** a sadržavala je sedam zadataka podijeljenih u dvije skupine. U prvoj skupini zadataka, koju su činili zadaci 26,27 i 28 cilj je bio vidjeti razumiju li djeca pojmove za označavanje pozicije u nizu. Ispred ispitanika je bila postavljena slika s nizom objekata te se od njih tražilo da imenuju *prvi* objekt, *posljednji* objekt i objekt *u sredini.* Za svaki točan odgovor dobili su 1 bod. Svaki od ovih odgovora zasebno je analiziran tijekom obrade podataka. Druga skupina zadataka sadržavala je zadatke od broja 29 do broja 32 i ispitivala je znanje o tome koji broj dolazi *prije,* odnosno *nakon* zadanog broja. Ova četiri zadatka bodovala su se zajedno pa su tu ispitanici mogli ostvariti od 0 do 4 bodova.

U kategoriji **konzervacije** cilj je bio ispitati usvojenost konzervacije kroz tri različita zadatka. U zadatku broj 33 bila su dva niza s jednakom količinom objekata i njegova je svrha bila upoznati djecu s ovakvom vrstom zadataka. 34 zadatak sastojao se od dva niza koja su sadržavala isti broj objekata, pri čemu je u drugom nizu razmak između objekata bio povećan. U ovom su zadatku ispitanici mogli ostvariti 1 bod ako su uočili da je broj objekata u oba niza jednak. Zadatak broj 35 također se sastojao od dva niza, međutim, u ovom su zadatku nizovi

imali različit broj objekata koji su bili složeni tako da se vizualno čini da je broj objekata isti. Ispitanici koji su uočili da nizovi sadrže različit broj objekata dobili su 1 bod.

U kategoriji su **uparivanja simbola i količine** bili zadaci od broja 36 do 38. Cilj je tih zadataka bio da ispitanici upare broj objekata sa slikovnog predloška s odgovarajućim brojčanim simbolom. U ovoj kategoriji ukupan broj bodova bio je u rasponu od 0 do 3.

Kategorija **odnosi među likovima** bila je najopsežnija kategorija u ispitivanju, a činili su je zadaci od broja 39 do 44. U ovoj je kategoriji bilo šest slikovnih predložaka na temelju kojih je ispitano razumijevanje pojmova za izražavanje odnosa u veličini, visini i duljini među objektima. Prva tri slikovna predloška imala su četiri slike, od kojih je prva bila referentna slika za usporedbe. Ispitanici su trebali pokazati objekte na slici koji su bili *veći od, manji od, viši od, niži od, kraći od* i *duži od* referentnog objekta. Ostala tri slikovna predloška imala su nizove od tri slike u kojima su ispitanici trebali pokazati *najveći, najmanji, najviši, najniži, najduži* i *najkraći* predmet u nizu te predmet *srednje veličine*. Za svaki pojam za koji su pokazali razumijevanje, dobili su 1 bod. U obradi je podataka napravljena analiza za svaki pojam zasebno.

Kategorija **nastavljanje obrasca** sadržavala je tri zadatka čiji je cilj bio da ispitanici nastave niz prema zadanom uzorku. 45. zadatak činio je uzorak od dvije čestice koje su se ponavljale, 46. zadatak imao je uzorak od tri čestice, a 47. zadatak uzorak od četiri čestice koje su se ponavljale. Ispitanici su za svaki zadatak dobili plastificirane čestice koje su odgovarale uzorku i morali su ih posložiti prema zadanom redoslijedu. Za svaki točno riješeni zadatak dobivali su po 1 bod. U ovoj je kategoriji u obradi podataka također napravljena analiza za svaki zadatak zasebno.

Nakon ove je kategorije slijedila kategorija **prepoznavanja grešaka u brojenju**. Ona je sadržavala tri zadatka koja su provedena tako da je ispitivač prebrojio niz od šest točaka, a djeca su nakon toga rekla je li prebrojavanje bilo točno ili ne. U 48. je zadatku cilj bio da ispitanici uoče da je u prebrojavanju preskočen jedan broj u nizu. Cilj 49. zadatka bio je da ispitanici uoče da je tijekom prebrojavanja jedan od brojeva u nizu ponovljen. Cilj 50. zadatka bio je da ispitanici uoče da je jedna od točaka prebrojana dvaput. Za uočavanje pojedine greške bilo je moguće ostvariti po jedan pod. Svaka greška u obradi podataka zasebno je analizirana.

Kategorija **aritmetičkih operacija** imala je dvije podskupine i maksimalni mogući rezultat od 8 bodova. Prvu podskupinu činila su dva zadatka zbrajanja i dva zadatka oduzimanja. Djeca

su dobivala bod ako su verbalizirala točan rezultat, stoga je ta podskupina imala raspon bodova od 0 do 4. Drugu su podskupinu također činila dva zadatka zbrajanja i dva zadatka oduzimanja, no u ovom je slučaju u zadacima bio cilj pronaći razliku između dva broja. Ispred ispitanika bili su postavljeni štapići koji su im mogli pomoći u rješavanju zadataka. Ispitanici su dobivali po jedan bod ako su u svakom zadatku znali verbalizirati koliko je štapića potrebno da dođu do zadanog zbroja, odnosno do zadane razlike. Ukupan broj bodova bio je kao u prethodnoj podskupini, od 0 do 4.

Kategoriju **problemskih zadataka** činili su zadaci od broja 59 do broja 62 čiji je cilj bio da ispitanici na zadano problemsko pitanje zbrajanja i oduzimanja do 10 daju točan odgovor. Ukupan raspon bodova u ovoj kategoriji bio je od 0 do 4.

4.4 Varijable istraživanja

U tablici broj 2 navedene su varijable koje su se ispitivale, kao i kratice prema kojima su unošene u SPSS program za statističku obradu podataka.

Tablica 2: Varijable korištene u istraživanju

NAZIV VARIJABLE	KRATICA VARIJABLE	OPIS VARIJABLE
kronološka dob	DOB_MJ	Kronološka dob ispitanika
dob	DOB	Dobna skupina ispitanika
prepoznavanje oblika	OBLIK	Pokazivanje zadanog oblika; krug, trokut, kvadrat.
razvrstavanje krug	R1	Razvrstavanje prema jednom kriteriju (oblik)
razvrstavanje kvadrat	R2	Razvrstavanje prema dva kriterija (oblik i veličina).
razvrstavanje trokut	R3	Razvrstavanje prema dva kriterija (oblik i boja).
razvrstavanje kvadrat	R4	Razvrstavanje prema tri kriterija (oblik, boja i veličina).
kardinalnost sve	KARD	Ukupan zbroj odgovora na tri pitanja prebrojavanja niza predmeta.
prebrojavanje skupa	SKUP	Prebrojavanje mačaka unutar skupa životinja.

uspoređivanje	USP	Ukupan zbroj odgovara na tri pitanja uspoređivanja prema slikovnom predlošku.
brojenje do 10	BROJ10	Automatizirano brojenje do 10.
brojanje od zadanog broja	ZADANO	Brojenje od broja 3 nadalje.
brojenje u intervalu	INTERVAL	Brojenje u intervalu od 4 do 9.
brojenje do 30	BROJ30	Automatizirano brojenje do 30.
brojanje unatrag	UNATRAG	Brojanje unatrag od broja 10.
brojenje po sekvencama	SEKVENCE	Brojanje samo parnih brojeva do 10.
čitanje brojeva	ČITANJE	Čitanje brojeva sa zadanog predloška.
pridruživanje	PRID	Ukupan zbroj odgovora na tri pitanja uparivanja točkica i nacrtanih predmeta.
pridruživanje uz razliku u količini	PRID_RAZL	Ukupan zbroj odgovora na četiri pitanja s uparivanjem predmeta.
usvojenost pojma „prvi“	PRVI	Pokazivanje prvog predmeta u nizu.
usvojenost pojma „zadnji“	ZADNJI	Pokazivanje zadnjeg predmeta u nizu.
usvojenost sintagme „u sredini“	SREDINA	Pokazivanje predmeta u sredini.
usvojenost ordinalnosti	ORD	Ukupni zbroj odgovora na pitanja koji broj dolazi nakon, odnosno prije zadanog broja.
uparivanje simbola i količine	SIMBOL	Zbroj odgovora na tri zadatka uparivanja količine predmeta s odgovarajućim brojem.
konzervacija- ista količina	KONZ1	Uočavanje da količine predmeta jednaka.
konzervacija- različita količina	KONZ2	Uočavanje da je količina predmeta različita.
veće od	VEĆE_OD	Pokazivanje slona na slici koji je veći od zadanog.
manje od	MANJE_OD	Pokazivanje slona na slici koji je manji od zadanog,
više od	VIŠE_OD	Pokazivanje drveta na slici koje je više od zadanog.
niže od	NIŽE_OD	Pokazivanje drveta na slici koje je niže od zadanog.
duže od	DUŽE_OD	Pokazivanje zmije na slici koja je duža od zadane.
kraće od	KRAĆE_OD	Pokazivanje zmije na slici koja je kraća od zadane.
najviše	NAJVIŠE	Pokazivanje tanjur s najviše kolača.

najmanje	NAJMANJE	Pokazivanje tanjura s najmanje kolača.
najviše	NAJVIŠI	Pokazivanje najviše zgrade.
najniže	NAJNIŽI	Pokazivanje najviše zgrade.
najduže	NAJDUŽE	Pokazivanje najduže grane.
najkraće	NAJKRAĆE	Pokazivanje najkraće grane.
srednje veličine	SREDNJE	Pokaži zgradu/granu srednje veličine.
nastavljanje niza – 2 čestice	NIZ1	Nastavljanje zadanog niza od dvije čestice.
nastavljanje niza - 3 čestice	NIZ2	Nastavljanje zadanog niza tri čestice.
nastavljanje niza - 4 čestice	NIZ3	Nastavljanje zadanog niza od četiri čestice.
preskakanje broja	GREŠKA1	Uočavanje preskakanja broja u prebrojavanju.
ponavljanje broja	GREŠKA2	Uočavanje ponavljanja broja u prebrojavanju.
ponovno brojanje	GREŠKA3	Uočavanje ponovnog brojenja nekog broja u prebrojavanju.
aritmetičke operacije	ARTM	Zbroj odgovora iz zadataka zbrajanja i oduzimanja prema slikovnom predlošku.
aritmetičke operacije uz pronalaženje razlike	ART_R	Zbroj odgovora iz zadataka zbrajanja i oduzimanja sa svrhom pronalaženja razlike.
problemski zadaci	PROBLEM	Ukupan zbroj odgovora na problemska pitanja zbrajanja i oduzimanja do 10.
ukupan rezultat	UKUPNO	Ukupan zbroj bodova sa svih varijabli.

5 OBRADA PODATAKA

Prikupljeni podaci statistički su obrađeni programom IBM® SPSS® Statistics 20. Na početku statističke obrade je za varijable omjernog tipa (ukupno njih 10: pridruživanje, pridruživanje uz razliku u količini, kardinalnost, ordinalnost,uspoređivanje, problemski zadaci, svi zadaci iz kategorije aritmetičkih operacija i kategorije razvrstavanja te ukupan rezultat) proveden Kolmogorov Smirnoff test za ispitivanje normalnosti distribucije. Sve varijable, osim varijable ukupan rezultat, odstupale su od normalne distribucije. Budući da je distribucija na

varijabli ukupan rezultat bila normalna, za analizu te varijable korištena je analiza varijance, dok je za ostale korišten neparametrijski Kruskal Wallis test za više nezavisnih uzoraka. Ostale varijable su bile ordinalnog ili nominalnog tipa, stoga je za usporedbu rezultata također korišten Kruskal Wallis test za više nezavisnih uzoraka. Sve varijable kod kojih se pokazala statistički značajna razlika opisane su i deskriptivno pomoću pripadajućih grafova kako bi se preciznije utvrdilo u kojoj dobi djeca usvajaju određeni matematički koncept. Iako su u ispitivanju zadaci bili poredani prema težini zahtjeva, rezultati statističke obrade bit će prikazani prema matematičkim domenama opisanim u uvodnom djelu.

6 REZULTATI I RASPRAVA

Tablica 3 prikazuje rezultate deskriptivne statistike za ukupan zbroj bodova za tri ispitane dobne skupine.

Tablica 3: Deskriptivna statistika na varijabli *ukupan rezultat* (UKUPNO) prema skupinama

	Broj ispitanika	Najmanji rezultat	Najveći rezultat	Srednja vrijednost	Standardna devijacija
četverogodišnjaci	30	17	59	35,57	11,371
petogodišnjaci	30	21	66	51,60	10,804
šestogodišnjaci	30	49	76	69,13	6,816

Rezultati deskriptivne statistike ukazuju na postojanje razlika u uspješnosti rješavanja zadataka između triju dobnih skupina. Skupina četverogodišnjaka ostvaruje prosječno najniže rezultate (M = 35,7), dok skupina šestogodišnjaka ostvaruje prosječno najviše rezultate (M = 69,13) zbog čega možemo zaključiti da se s porastom dobi povećava matematičko znanje u svim domenama. Skupina šestogodišnjaka je jedina u kojoj je ostvaren maksimalan broj od 76 bodova, što ukazuje na to da su u toj dobi usvojene sve ispitane matematičke vještine. Zanimljivo je da je u toj dobi varijabilnost u rješavanju ovih zadataka puno manja nego u skupini petogodišnjaka i četverogodišnjaka što je vidljivo u standardnoj devijaciji koja za skupinu šestogodišnjaka iznosi SD = 6,816, a za ostale skupine je ona iznad 10.

Za usporedbu rezultata između dobnih skupina za varijablu ukupni rezultat (UKUPNO) korišten je test analize varijance za nezavisne uzorke budući da je uzorak bio dovoljno velik

(N = 90), a distribucija rezultata je bila normalna. U tablici 4 prikazani su rezultati jednosmjerne analize varijance na varijabli ukupan rezultat (UKUPNO).

Tablica 4: Rezultati jednosmjerne analize varijance na varijabli ukupan rezultat (UKUPNO)

	Zbroj kvadrata	Prosječni kvadrat	F omjer	Stupnjevi slobode
Razlike između grupa	16.912,067	8.456,033	86,733	2**

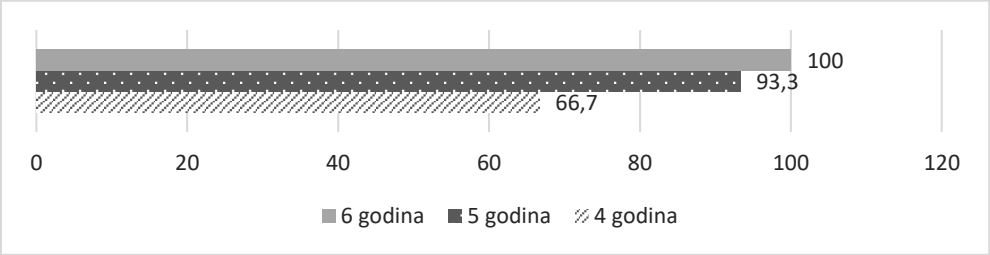
** razina statističke značajnosti $p < 0,01$
* razina statističke značajnosti $p < 0,05$

Rezultati pokazuju da postoji statistički značajna razlika na varijabli *ukupni rezultat* za ispitane skupine djece uz razinu statističke značajnosti $p < 0, 01$. Rezultati statističke analize potvrđuju zaključke o postojanju razlika u uspješnosti rješavanja zadataka. Prema podacima samih prosječnih postignuća kod svake skupine, vidljivo je da su šestogodišnjaci bili najuspješniji. Kako bismo vidjeli u kojim domenama dolazi do najvećeg napretka u matematičkom znanju kroz predškolsku dob, u sljedećem dijelu bit će prikazane frekvencije odgovora i rezultati statističke analize za svaku kategoriju zasebno. Većina varijabli iz svih kategorija bila je nominalna ili ordinalna. U slučaju omjernih varijabli, nijedna varijabla nije pokazala normalnu distribuciju rezultata, stoga je za statističku analizu korišten neparametrijski Kruskal Wallis test za usporedbu tri nezavisna uzorka.

6.1 Broj i usvojenost načela brojenja

6.1.1 Automatizirano brojenje do 10

Graf 1: Postotak uspješnosti u automatiziranom brojenju do 10



Frekvencija postotaka uspješnosti brojenja do 10 iz grafa 1 pokazuje da više od 60% djece u dobi od 4 godine broji do 10. Isto to čini više od 90% petogodišnjaka i svi šestogodišnjaci.

Tablica 5: Rezultati Kruskal Wallis testa na varijabli brojenje do 10 (BROJ10)

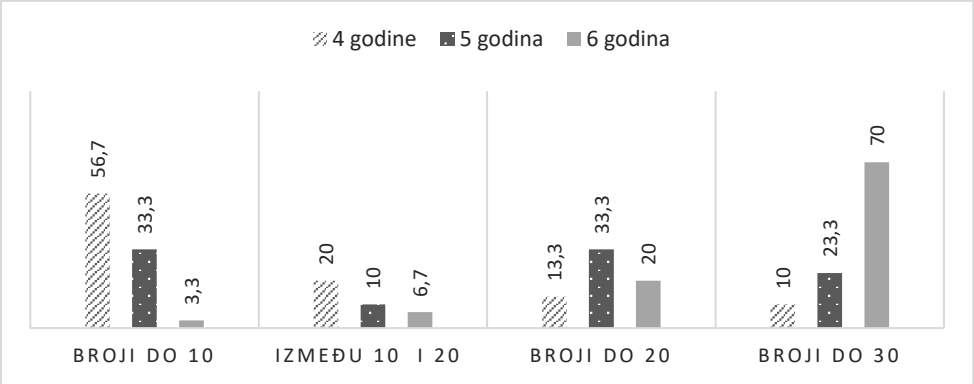
	Zbroj rangova – četverogodišnjaci	Zbroj rangova – petogodišnjaci	Zbroj rangova – šestogodišnjaci	Hi kvadrat	df
BROJ10	36,50	48,50	51,50	15,974**	2

** razina statističke značajnosti $p < 0,01$
* razina statističke značajnosti $p < 0,05$

U tablici 5 prikazani su rezultati Kruskal Wallis testa na varijabli *brojenje do 10* (BROJ10). Statistička analiza pokazala je da na ovoj varijabli postoji statistički značajna razlika između tri dobne skupine uz razinu značajnosti $p < 0,01$. Prema prikazanim rezultatima, šestogodišnjaci su najuspješniji u brojenju do 10. Dobiveni rezultati navode na zaključak da je brojenje automatizmom do 10 vještina koja se usvaja tijekom četvrte godine života. Montague – Smith i suradnici (2018) navode da djeca u dobi između treće i četvrte godine razvijaju brojenje automatizmom do 5 i do 10. Iz tog razloga potrebno je provesti istraživanje na uzorku trogodišnjaka kako bi se vidjelo koliki broj djece prije četvrte godine razvija ovu sposobnosti, a koliki broj to čini tek nakon četvrte godine.

6.1.2 Automatizirano brojenje do 30

Graf 2: Postotak uspješnosti u automatiziranom brojenju do 30



Rezultati prikazani u grafu 2 pokazuju da više od 56% četverogodišnjaka broji samo do 10. Ostalih 44% broji dalje, međutim tek njih 10% ima usvojene nazive za desetice, odnosno broji do 30. Petogodišnjaci su najvarijabilnija skupina pa tako njih 33% broji do 10, a ostalih 67% varira u brojenju automatizmom, s najvećim postotkom onih koji broje automatizmom do 20. Automatizirano brojenje do 30 usvojilo je samo 23% petogodišnjaka. U skupini šestogodišnjaka samo je jedno dijete brojilo do 10, dok su sva ostala brojila do 15, 20 ili 30.

Tablica 6: Rezultati Kruskal Wallis testa na varijabli brojenje do 30 (BROJ30)

	Zbroj rangova – četverogodišnjaci	Zbroj rangova – petogodišnjaci	Zbroj rangova – šestogodišnjaci	Hi kvadrat	df
BROJ30	29,12	42,23	65,15	31,910**	2

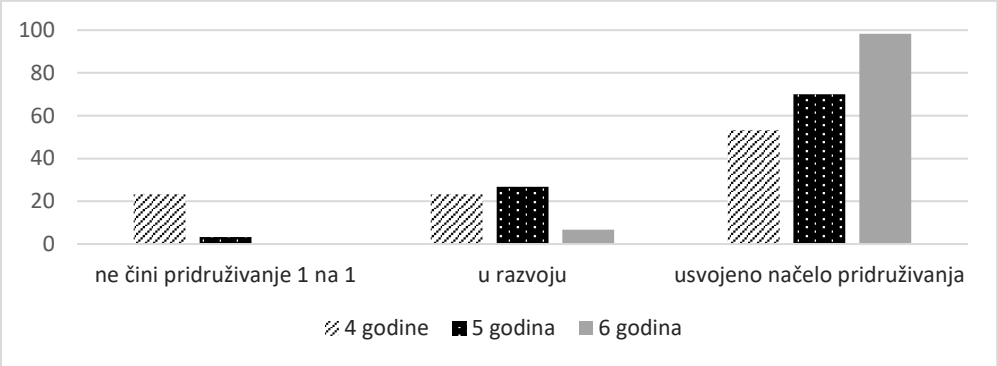
** razina statističke značajnosti $p < 0,01$
* razina statističke značajnosti $p < 0,05$

Prema prikazanim rezultatima iz tablice 6, postoji statistički značajna razlika između tri dobne skupine na varijabli *brojenje do 30* (BROJ30) uz razinu značajnosti $p < 0,01$. Navedeni rezultati ukazuju na to da s porastom dobi raste sposobnost brojenja automatizmom do većih brojčanih vrijednosti. Geary (1994) navodi da do kraja predškolskog razdoblja većina djece usvoji brojenje automatizmom do 20, a određeni broj djece može naučiti i brojiti automatizmom do 100. Rezultati dobiveni istraživanjem potvrđuju da krajem predškolskog

razdoblja (u dobi od šest godina) 90% djece zna brojiti automatizmom do 20, a od toga njih 70% broji automatizmom do 30 što je baza za usvajanje brojenja do 100.

6.1.3 Usvojenost načela pridruživanja 1 na 1

Graf 3: postotak uspješnosti u zadacima pridruživanja



Frekvencije odgovora prikazane u grafu 3 pokazuju da više od 70% četverogodišnjaka ima razvijeno ovo načelo ili je u stadiju razvijanja ovog načela. Isto to vrijedi za više od 90% petogodišnjaka i šestogodišnjaka.

Tablica 7: Rezultati Kruskal Wallis testa na varijabli pridruživanje (PRIDRUŽIVANJE)

	Zbroj rangova – četverogodišnjaci	Zbroj rangova – petogodišnjaci	Zbroj rangova – šestogodišnjaci	Hi kvadrat	df
PRID	35,85	45,25	55,40	13,565*	2

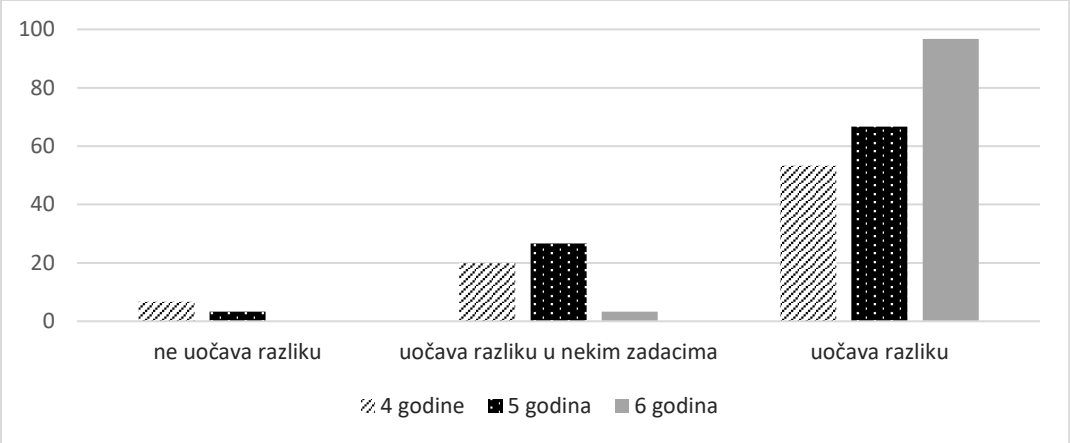
** razina statističke značajnosti $p < 0,01$
* razina statističke značajnosti $p < 0,05$

Rezultati Kruskal Wallis testa prikazani u tablici broj 7 pokazuju da postoji statistički značajna razlika između tri dobne skupine na varijabli *pridruživanje* (PRID) uz statističku značajnost $p < 0,01$. Prema ovim rezultatima, s porastom dobi raste uspješnost u rješavanju zadataka koji ispituju usvojenost načela pridruživanja jedan na jedan. Podaci iz literature govore da je načelo pridruživanja jedan na jedan prvo načelo koje se razvija pa tako već djeca u dobi od tri godine imaju usvojeno ovo načelo ((Klein i Starkey, 1997; prema Vlahović

Štetić i Kovačić, 1997). Podaci dobiveni ovim istraživanjem potvrđuju da se ovo načelo razvija vrlo rano pa tako većina djece u četvrtoj godini ima ili razvijeno ovo načelo ili je ono u procesu razvoja.

6.1.4 Usvojenost načela pridruživanja: uočavanje razlike u količini

Graf 4: postotak uspješnosti u zadacima pridruživanja uz uočavanje razlike u količini



U grafu 4 prikazane su frekvencije uspješnosti rješavanja zadataka pridruživanja uu uočavanje razlike u količini. Na ovoj varijabli više od 70% četverogodišnjaka uočava razliku u količinama na nekim ili na svim zadacima iz ove kategorije. Isto to čini više od 90% petogodišnjaka i šestogodišnjaka.

Tablica 8: Rezultati Kruskal Wallis testa na varijabli pridruživanje uz razliku u količini (PRID_RAZL)

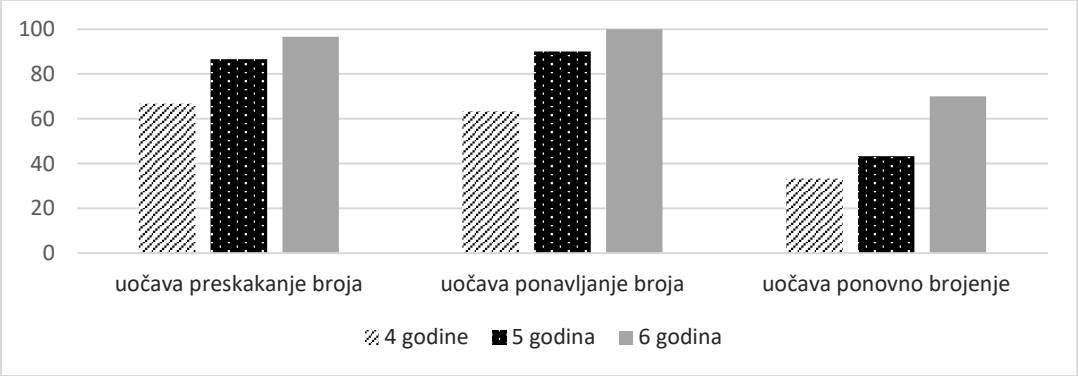
	Zbroj rangova – četverogodišnjaci	Zbroj rangova – petogodišnjaci	Zbroj rangova – šestogodišnjaci	Hi kvadrat	df
PRID_RAZL	36	38,98	58,27	24,452**	2

** razina statističke značajnosti $p < 0,01$
* razina statističke značajnosti $p < 0,05$

Tablica 8 prikazuje rezultate statističke obrade uz pomoć Kruskal Wallis testa. Iz tablice je vidljivo da postoji statistički značajna razlika između tri dobne skupine na varijabli *pridruživanje uz razliku u količini* (PRID_RAZL) uz statističku značajnost p > 0,01. Ovi rezultati označavaju da s porastom dobi raste uspješnost u rješavanju zadataka ovog tipa. Budući da je prosječna dob u skupini četverogodišnjaka bila 4,04, moguće je da bi dio četverogodišnjaka za nekoliko mjeseci bio uspješniji u uočavanju razlika između količina. Iz tog razloga, može se zaključiti da je uočavanje razlike u pridruživanju jedan na jedan također razvijeno u četvrtoj godini, a potrebna su istraživanja s većim uzorkom i manjom dobnom skupinom da bi se utvrdilo uočavaju li i mlađa djeca razlike u količini.

6.1.5 Usvojenost načela stabilnog poretka: prepoznavanje grešaka u brojenju

Graf 5: postotak uspješnosti na zadacima prepoznavanja grešaka



Prema rezultatima iz grafa 5 većina ispitanika iz svih dobnih skupina je uspješna u prepoznavanju preskakanja broja i ponavljanja broja u brojenju drugih. Nasuprot tome, ponovno brojenje istog predmeta je vrsta greške koju najmanji broj ispitanika uočava. U dobi od četiri i pet godini manje od 50% ispitanika je prepoznalo ovu vrstu pogreške, dok se u dobi od šest godina ovaj postotak povećao na 70%. Valja napomenuti da je ovaj zadatak bio jedan od zadnjih ispitanih zadataka, stoga je moguće da ispitanici nisu naveli ovo kao grešku zbog toga što ju zbog pada koncentracije i pažnje nisu uočili.

Tablica 9: Rezultati Kruskall Wallis testa na varijablama iz kategorije prepoznavanje grešaka: preskakanje broja (GREŠKA1), ponavljanje broja (GREŠKA2) i ponovno brojenje istog predmeta (GREŠKA3)

	Zbroj rangova – četverogodišnjaci	Zbroj rangova – petogodišnjaci	Zbroj rangova – šestogodišnjaci	Hi kvadrat	df
GREŠKA1	38,00	47,00	51,50	9,968**	2
GREŠKA2	36,00	48,00	52,50	16,227**	2
GREŠKA3	38,50	43,00	55,00	8,531	2

** razina statističke značajnosti $p < 0,01$
* razina statističke značajnosti $p < 0,05$

U tablici 9 prikazani su rezultati Kruskall Wallis testa na varijablama iz kategorije prepoznavanje grešaka u brojenju. Rezultati na varijablama *preskakanje broja* (GREŠKA1) i *ponavljanje broja* (GREŠKA2) pokazuju da postoji statistički značajna razlika između tri dobne skupine u uspješnosti rješavanja ovih zadataka uz razinu značajnosti $p < 0,01$. Navedeno ukazuje na to da se s porastom dobi povećava uspješnost u uočavanju ovih vrsta grešaka, što potvrđuju i rezultati iz grafa 16. Nasuprot tome, na varijabli *ponovno brojenje istog predmeta* (GREŠKA3), nije pronađena statistički značajna razlika između tri dobne skupine, što znači da je u svim trim dobnim skupinama gotovo jednak broj djece koja uočavaju i one koja ne uočavaju ovu grešku. Ipak, frekvencije iz grafa 16 pokazuju da su šestogodišnjaci puno uspješniji u odnosu na mlađe dobne skupine. Podaci iz literature navode da je usvojenost načela stabilnog poretka, uz načelo pridruživanja jedan na jedan, usvojeno do treće godine, međutim djeca tek u petoj godini imenuju greške u tuđem brojenju (Sarama i Clements, 2009). Rezultati dobiveni ovim istraživanjem odgovaraju podacima iz literature, odnosno više od 80% petogodišnjaka prepoznalo je prve dvije vrste grešaka, dok je prepoznavanje grešaka ponovnog brojenja istog objekta prepoznalo njih 43%. Ipak, ove zaključke je potrebno uzeti s dozom opreza, zbog ranije navedenih čimbenika pažnje i koncentracije, ali i činjenice da mnoga djeca imaju stav da odrasli posjeduju više znanja od njih pa ne navode eventualne greške koje su uočili.

6.1.6 Usvojenost načela kardinalnosti

Graf 6: Postotak uspješnosti na zadacima kardinalnosti

Iz grafa 6 iščitava se da 30% četverogodišnjaka nema usvojeno načelo kardinalnosti. 16,7% četverogodišnjaka je točno riješilo jedan ili dva zadatka iz kategorije kardinalnosti, što upućuje na to da je kod te djece usvajanje načela kardinalnosti u razvoju. Najveći broj četverogodišnjaka (više od 50%) ima usvojeno načelo kardinalnosti. Što se tiče petogodišnjaka i šestogodišnjaka, njih većina ima usvojeno načelo kardinalnosti (5 godina - 70%; 6 godina – 93%). Kod nekoliko petogodišnjaka usvajanje načela kardinalnosti bilo je u razvoju, odnosno riješili su 2 od 3 zadatka iz te kategorije. Samo jedno dijete iz skupine petogodišnjaka i jedno iz skupine šestogodišnjaka nije bilo uspješno na ovim zadacima.

Tablica 10: Rezultati Kruskal Wallis testa na varijabli kardinalnost (KARD)

	Zbroj rangova – četverogodišnjaci	Zbroj rangova – petogodišnjaci	Zbroj rangova – šestogodišnjaci	Hi kvadrat	df
KARD	35,45	46,03	55,02	13,600**	2

** razina statističke značajnosti $p < 0,01$
* razina statističke značajnosti $p < 0,05$

Tablica 10 prikazuje rezultate Kruskal Wallis testa na varijabli *kardinalnost (*KARD). Iz tablice se zaključuje da postoji statistički značajna razlika između tri dobne skupine na varijabli *kardinalnost* (KARD) uz statističku značajnost $p < 0,01$. Možemo zaključiti da su četverogodišnjaci najmanje uspješni u rješavanju ovih zadataka, dok su šestogodišnjaci najuspješniji. Podaci iz literature navode da se načelo kardinalnosti usvaja u četvrtoj godini

(Geary 1994; Sarama i Clements, 2009; Montague – Smith i sur, 2018). Rezultati dobiveni ovim istraživanjem pokazuju da oko 70% ispitane djece u četvrtoj godini usvaja ili ima usvojeno ovo načelo. Postotak od 30% četverogodišnjaka koji nisu počeli usvajati ovo načelo, može se objasniti činjenicom da je prosječna dob četverogodišnjaka bila 4,04. Djeca koja su tek navršila četiri godine očekivano ostvaruju slabije rezultate u odnosu na djecu starije kronološke dobi, no za nekoliko mjeseci moguće je da bi veliki dio njih također usvojio ovo načelo.

6.1.7 Uspoređivanje

Tablica 11: Rezultati Kruskall Wallis testa na varijabli uspoređivanje

	Zbroj rangova – četverogodišnjaci	Zbroj rangova – petogodišnjaci	Zbroj rangova – šestogodišnjaci	Hi kvadrat	df
USP	40,98	47,02	48,50	7,459	2

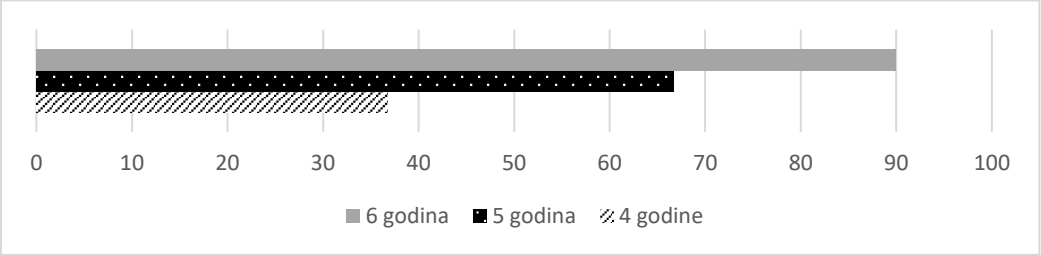
** razina statističke značajnosti $p < 0,01$
* razina statističke značajnosti $p < 0,05$

Rezultati Kruskall Wallis testa na varijabli *uspoređivanje* (USP) prikazani u tablici 11 pokazuju da ne postoji statistički značajna razlika između tri dobne skupine. Navedeno ukazuje na to da je sposobnost uspoređivanja količine usvojena u dobi od četiri godine, a daljnja istraživanja su potrebna da bi se vidjelo u kojoj godini djeca počinju uspoređivati dva skupa. Potrebno je napomenuti da ispitanici nisu dobili uputu na koji način trebaju usporediti dva skupa. Djeca mlađe kronološke dobi uglavnom su činila usporedbe temeljem procjene, dok su djeca starije kronološke dobi činila precizno uspoređivanje kroz prebrojavanje oba skupa. Sa stajališta procjene količine, u dobi od tri godine djeca uspješno razlikuju setove u omjeru 2:3, a neki razlikuju i omjere 3:4, dok sa 6 godina mogu razlikovati setove u omjerima 5:6 i 6:7 (Halberda i Feigenson, 2008). Zadaci u ovom istraživanju imali su omjere 2:3, 5:6 i 7:9, stoga je za očekivati da će razlike između dobnih skupina biti minimalne i da će većina ispitanika bez poteškoća riješiti prvi i drugi zadatak. U trećem zadatku bili su omjeri većih količina (7 i 9), ali zbog efekta udaljenosti, ovaj su zadatak također sve tri dobne skupine mogle uspješno riješiti. Što se tiče uspoređivanja uz pomoć prebrojavanja, u literaturi je navedeno da se ova sposobnost razvija nakon razvoja kardinalnosti (Sarama i Clements,

2009). U analizi rezultata na varijabli *usvojenost kardinalnosti* vidljivo je da se kardinalnost usvaja između četvrte i pete godine, stoga je također očekivano da će sve tri dobne skupine biti uspješne u rješavanju zadataka iz ove kategorije.

6.1.8 Prebrojavanje skupa

Graf 7: Postotak djece koja prebrojava podskup unutar većeg skupa



Tablica 12: Rezultati Kruskal Wallis testa na varijabli prebrojavanje skupa (SKUP)

	Zbroj rangova – četverogodišnjaci	Zbroj rangova – petogodišnjaci	Zbroj rangova – šestogodišnjaci	Hi kvadrat	df
SKUP	33,00	46,50	57,00	18,510**	2

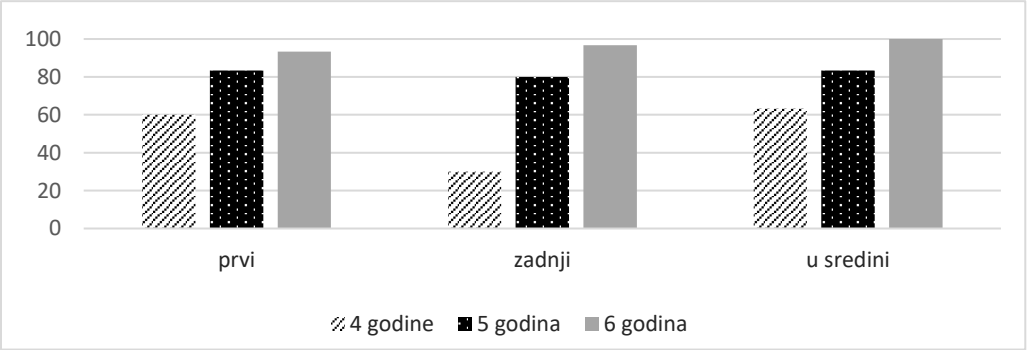
** razina statističke značajnosti $p < 0,01$
* razina statističke značajnosti $p < 0,05$

Rezultati Kruskal Wallis testa prikazani u tablici 12 pokazuju da postoji statistički značajna razlika između tri dobne skupine na varijabli *prebrojavanje skupa* (SKUP) uz razinu značajnosti $p < 0,01$. Rezultati iz tablice te frekvencije uspješnosti prebrojavanja skupa prikazane u grafu 7 pokazuju da se s porastom dobi povećava uspješnost rješavanja zadatka u toj kategoriji. Budući da je uspješnost na ovom zadatku vezana uz usvojenost načela kardinalnosti, djeca koja nemaju uopće ili nemaju u potpunosti razvijeno načelo kardinalnosti bit će neuspješna u ovom zadatku, što je vidljivo iz niskog postotka uspješnosti kod četverogodišnjaka. Nekoj djeci koja imaju usvojeno načelo kardinalnosti ovaj zadatak je bio težak jer, za razliku od zadataka iz kategorije kardinalnosti, ovdje elementi nisu bilo složeni linearno, a Sarama i Clements (2009) navode da se razumijevanje kardinalnosti za veće

skupove i skupove koji nisu složeni linearno usvaja u petoj godini. Dodatni distraktor je bio što su trebali brojiti samo određene elemente iz skupa (samo mačke), a mnoga djeca su automatizmom počela brojiti sve životinje u skupu. Iako već neka djeca u dobi od četiri godine uspješno rješavaju ovaj zadatak, prema dobivenim rezultatima vještina prebrojavanja podskupa unutar većeg skupa razvija se kod većine djece tijekom pete godine života, što je u skladu s podacima koje navode Montague – Smith i suradnici (2018).

6.1.9 Usvojenost načela ordinalnosti – prva skupina zadataka

Graf 8: Usvojenost pojmova za označavanje pozicije u nizu



Iz grafa 8 je vidljivo da većina djece iz svih dobnih skupina ima usvojen pojam „prvi“ i sintagmu „u sredini“, stoga na ovim varijablama nisu pronađene velike razlike između triju ispitanih skupina.. Rezultat koji se ističe je nizak postotak uspješnosti od 30% na razumijevanju pojma „zadnji“ kod skupine četverogodišnjaka.

Tablica 13: Rezultati Kruskall Wallis testa na varijablama usvojenosti pojmova za označavanje pozicije u nizu: „prvi“, „zadnji“ „u sredini“

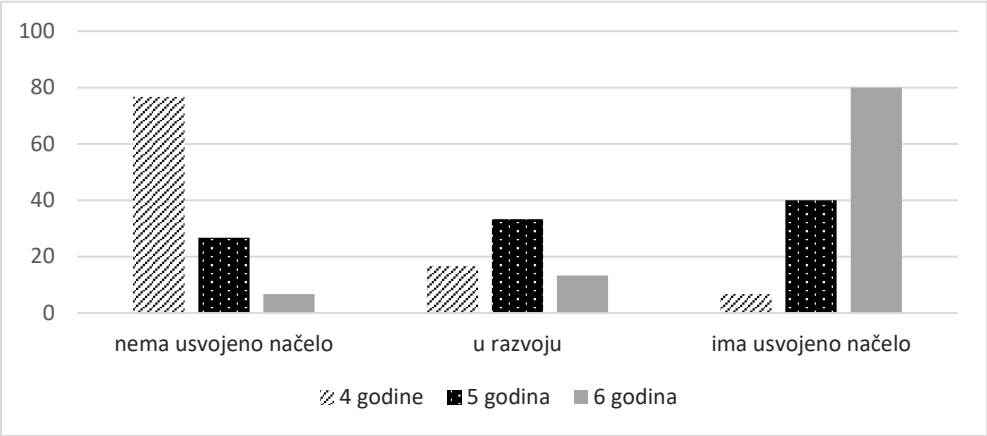
	Zbroj rangova – četverogodišnjaci	Zbroj rangova – petogodišnjaci	Zbroj rangova – šestogodišnjaci	Hi kvadrat	df
PRVI	37,00	47,50	52,00	10,424	2
ZADNJI	28,00	50,50	58,00	33,324**	2
SREDINA	37,00	46,00	53,50	13,681*	2

** razina statističke značajnosti $p < 0,01$
* razina statističke značajnosti $p < 0,05$

U tablici 13 prikazan je dio rezultata iz kategorije ordinalnosti koji se odnosi na razumijevanje pojmova za označavanje pozicije u nizu. Rezultati Kruskal Wallis testa na varijabli *usvojenost pojma „prvi“ (*PRVI) pokazuju da ne postoji statistički značajna razlika u usvojenosti ovog pojma između tri dobne skupine. Iz toga proizlazi da sve tri dobne skupine razumiju ovaj pojam. Nasuprot tome, rezultati statističke obrade na varijabli *usvojenost pojma „zadnji*“ (ZADNJI) pokazuju da postoji statistički značajna razlika u usvojenosti ovih pojmova između tri dobne skupine uz statističku značajnost $p < 0,01$. Navedeni rezultati poklapaju se s frekvencijama uspješnosti prikazanim u grafu 9 koji su također pokazivali velike razlike između skupina, najviše između skupine četverogodišnjaka i dviju starijih dobnih skupina. Na varijabli *usvojenost sintagme „u sredini“* (SREDINA) također postoji statistički značajna razlika između triju dobnih skupina, no uz statističku značajnost $p < 0,05$. Na temelju ovih rezultata zaključuje se da su šestogodišnjaci najuspješniji u razumijevanju ovih pojmova. Djeca predškolske dobi se s ovim pojmovima sreću svakodnevno. Primjerice, tijekom stajanja u redu u vrtiću ili tijekom raznih igri gdje je za pobjedu potrebno doći do cilja prvi, djeca se susreću s pojmom „prvi“. Slična situacija je i sa sintagmom „u sredini“ pa djeca mogu često čuti da netko sjedi ili stoji u sredini, ili da je neki predmet u nizu u sredini. Iz tog razloga, djeca vrlo rano usvajaju ove pojmove, što vidljivo iz rezultata dobivenih ovim istraživanjem. Kada govorimo u nizu, djeca se češće susreću sa sintagmom „na kraju“ (primjerice, Ana stani na kraj reda), nego s pojmom „zadnji“ što može objasniti niski postotak razumijevanja ovog pojma kod četverogodišnjaka. Montague- Smith i suradnici (2018) navode da djeca usvajaju označavanje pozicije u nizu tijekom pete godine, zbog čega čak 80% petogodišnjaka pokazuje razumijevanje ovog pojma pa možemo zaključiti da dobiveni rezultati odgovaraju onima iz literature.

6.1.10 Usvojenost načela ordinalnosti – druga skupina zadatka

Graf 9: postotak uspješnosti u zadacima ordinalnosti



Iz grafa 9 iščitava se da većina četverogodišnjaka (>75%) nema usvojeno načelo ordinalnosti. Skupina petogodišnjaka vrlo je varijabilna. Ipak, najveći postotak petogodišnjaka (njih 40%) ima usvojeno ovo načelo. Budući da je prosječna dob petogodišnjaka bila 5,04, a 80% šestogodišnjaka uspješno rješava zadatke koji ispituju usvojenost ovog načela, može se pretpostaviti da bi do kraja pete godine velik dio njih također usvojio ispitano načelo.

Tablica 14: Rezultati Kruskal Wallis testa na varijabli ordinalnost (ORD)

	Zbroj rangova – četverogodišnjaci	Zbroj rangova – petogodišnjaci	Zbroj rangova – šestogodišnjaci	Hi kvadrat	df
ORD	25,03	46,63	64,83	39,934**	2

** razina statističke značajnosti $p < 0,01$
* razina statističke značajnosti $p < 0,05$

U tablici 14 prikazani su rezultati Kruskal Wallis testa na varijabli *ordinalnost* (ORD). Prema navedenim rezultatima postoji statistički značajna razlika između tri dobne skupine na varijabli ordinalnost (ORD) uz statističku značajnost $p > 0,01$, što znači da se s porastom dobi uspješnost rješavanja zadataka iz ove kategorije povećava. Promatrajući rezultate kvalitativne statističke obrade, možemo zaključiti da se načelo ordinalnosti usvaja tijekom pete godine, a kod većine djece je usvojeno u dobi od šest godine što odgovara podacima iz literature (Sarama i Clements, 2009).

6.1.11 Usvojenost načela konzervacije

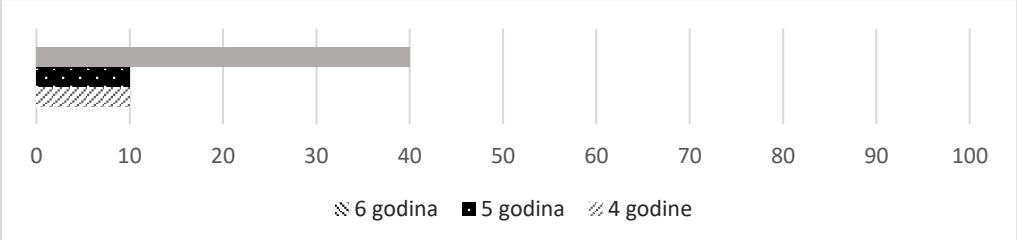
Tablica 15: Rezultati Kruskall Wallis testa na varijablama iz kategorije usvojenosti konzervacije: konzervacija ista količina (KONZ1) i konzervacija različita količina (KONZ2)

	Zbroj rangova – četverogodišnjaci	Zbroj rangova – petogodišnjaci	Zbroj rangova – šestogodišnjaci	Hi kvadrat	df
KONZ1	41,00	41,00	54,50	11,125*	2
KONZ2	39,00	46,50	51,00	7,028	2

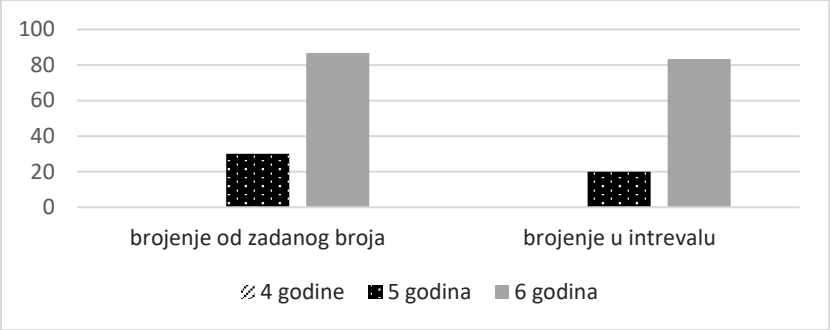
** razina statističke značajnosti $p < 0,01$
* razina statističke značajnosti $p < 0,05$

Tablica 15 prikazuje rezultate Kruskall Wallis testa na varijablama *konzervacija ista količina* KONZ1 i *konzervacija različita količina* KONZ2 iz kategorije usvojenosti konzervacije. Rezultati pokazuju da ne postoji statistički značajna razlika na varijabli *konzervacija različita količina* (KONZ2) između tri dobne skupine, što znači da sve tri dobne skupine gotovo jednako uspješno rješavaju ovaj zadatak. S druge strane, rezultati na varijabli *konzervacija ista količina* (KONZ1) pokazuju da postoji statistički značajna razlika između tri dobne skupine uz razinu statističke značajnosti od $p < 0,01$. Navedeni rezultati ukazuju na to da su šestogodišnjaci skupina koja je ostvarila najuspješnije rezultate na ovom zadatku, što potvrđuju postoci prikazani u grafu 10. Iz grafa se iščitava da ovo načelo ima usvojeno manje od 10% djece u dobi od četiri i pet godina. Skupina šestogodišnjaka je puno uspješnija s postotkom od 40% uspješnosti u rješavanju zadatka koje ispituju ovo načelo. Prema podacima iz literature, usvajanje konzervacije karakteristično je za djecu koja su na prijelazu između predškolskog i školskog razdoblja (Vasta, Haith i Miller,1998). Budući da su šestogodišnjaci jedina skupina koja u većem postotku rješava zadatak ispitivanja konzervacije, možemo zaključiti da se rezultati poklapaju s podacima iz literature.

Graf 10: postotak uspješnosti na varijabli konzervacija - ista količina



6.1.12 Brojenje od zadanog broja i brojenje u intervalu



Graf 11: postotak uspješnosti brojenja od zadanog broja i brojenja u intervalu

Rezultati iz grafa 11 pokazuju da nijedan četverogodišnjak još nema usvojenu sposobnost brojenja od zadanog broja kao ni sposobnost brojenja u intervalu. 30% petogodišnjaka i 86% šestogodišnjaka broji od zadanog broja. Postoci uspješnosti za zadatak brojenja u intervalu su niži pa tako u petoj godini u intervalu broji tek 20% djece, a u šestoj 83% djece. Ovi podaci navode na zaključak da se kod većine djece ova dva koncepta usvajaju između pete i šeste godini.

Tablica 16: Rezultati Kruskal Wallis testa na varijablama brojenje od zadanog broja (ZADANO) i brojenje u intervalu (INTERVAL)

	Zbroj rangova: četverogodišnjaci	Zbroj rangova: petogodišnjaci	Zbroj rangova: šestogodišnjaci	Hi kvadrat	df
ZADANO	28,00	41,50	67,00	48,361**	2
INTERVAL	30,00	39,00	67,50	49,731**	2

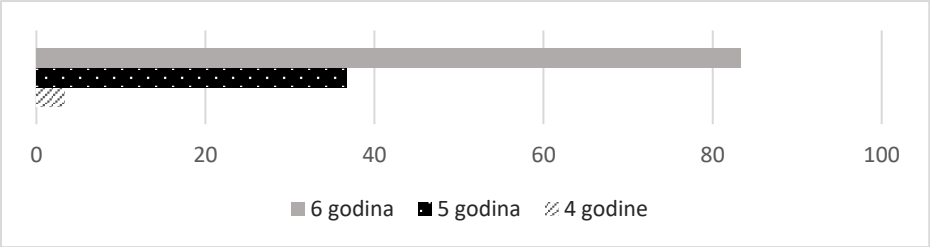
** razina statističke značajnosti $p < 0,01$
* razina statističke značajnosti $p < 0,05$

U tablici 16 prikazani su rezultati Kruskal Wallis testa na varijablama *brojenje od zadanog broja* i *brojenje u intervalu*. Prema rezultatima iz tablice postoji statistički značajna razlika na obje varijable između tri dobne skupine uz statističku značajnost $p < 0,01$. Navedeni rezultati pokazuju da je najveća razlika između skupine petogodišnjaka i šestogodišnjaka, što ukazuje na to da se promjene u usvajanju ove sposobnosti događaju krajem pete, odnosno početkom

šeste godine. Prema podacima iz literature, vještina brojenja od zadanog broja usvaja se u petoj godini (Sarama i Clements, 2009). Dobiveni rezultati odgovaraju podacima iz literature budući da nijedno dijete mlađe od pet godina nije riješilo ove zadatka. Preduvjet za brojenje u intervalu je usvojena vještina brojenja od zadanog broja pa tako se očekivano i ova vještina počinje razvijati u petoj godini.

6.1.13 Brojenje unatrag od 10

Graf 12: postotak uspješnosti u brojenju unatrag od 10



Postoci uspješnosti na varijabli *brojenje unatrag od 10* prikazani u grafu 12 pokazuju da tijekom pete godine djeca počinju brojiti unatrag, no većina djecu (> 80%) ovu sposobnost ima razvijenu u dobi od šest godina.

Tablica 17: Rezultati Kruskal Wallis testa na varijabli brojenje unatrag od 10 (UNATRAG)

	Zbroj rangova – četverogodišnjaci	Zbroj rangova – petogodišnjaci	Zbroj rangova – šestogodišnjaci	Hi kvadrat	df
UNATRAG	28,50	43,50	64,50	39,576**	2

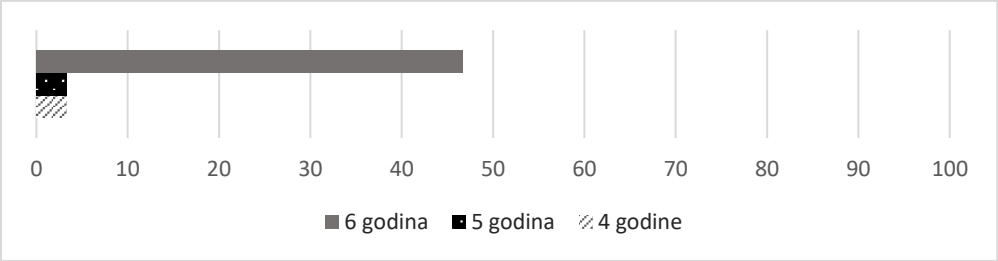
** razina statističke značajnosti $p < 0,01$
* razina statističke značajnosti $p < 0,05$

Prema rezultatima Kruskal Wallis testa prikazanim u tablici 17 postoji statistički značajna razlika na varijabli *brojenje unatrag od 10* (UNATRAG) uz razinu statističke značajnosti $p < 0,01$. Prikazani rezultati ukazuju na to da s porastom dobi raste uspješnost u brojenju unatrag. Prema podacima iz svjetske literature, ova vještina usvaja se s pet godina (Montague – Smith i sur, 2018). Budući da je više od 30% ispitanika brojilo unatrag od 10, a kronološka dob ispitanika bila 5,04 godina, možemo pretpostaviti da bi u drugoj polovici pete godine ovaj

postotak bio puno veći što bi bilo u skladu s normama koje navode Montague – Smith i suradnici (2018).

6.1.14 Brojenje po sekvencama

Graf 13: postotak uspješnosti u brojenju prema po sekvencama



Frekvencije uspješnosti rješavanja ovog zadatka prikazane u grafu 13 pokazuju da svega 6% djece mlađe od šest godina broji po sekvencama. S druge strane, u skupini djece od šest godina, više od 45% djece uspješno broji po sekvencama, odnosno uspješno broji samo parne brojeve.

Tablica 18: Rezultati Kruskal Wallis testa na varijabli brojenje po sekvencama (SEKVENCE)

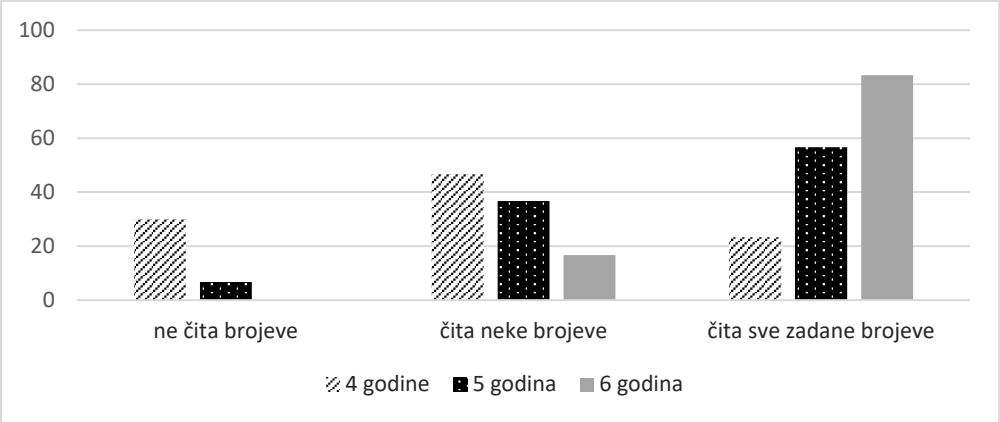
	Zbroj rangova – četverogodišnjaci	Zbroj rangova – petogodišnjaci	Zbroj rangova – šestogodišnjaci	Hi kvadrat	df
SEKVENCE	39,25	38,98	58,27	24,452**	2

** razina statističke značajnosti $p < 0,01$
* razina statističke značajnosti $p < 0,05$

U tablici 18 prikazani su rezultati Kruskal Wallis testa na varijabli *brojenje po sekvencama* (SEKVENCE). Rezultati pokazuju da postoji statistički značajna razlika u uspješnosti brojenja po sekvencama između tri dobne skupine uz razinu značajnosti $p < 0,01$. Iz ovih rezultata iščitava se da su šestogodišnjaci najuspješnija skupina u brojenju po sekvencama. Dobiveni rezultati u skladu su s podacima iz literature koji govore da se brojenje po sekvencama razvija u dobi od šest godina (Montague – Smith i sur, 2018).

6.1.15 Čitanje brojeva

Graf 14: postotak uspješnosti na varijabli čitanje brojeva



Iz grafa 14 vidljivo je da većina djece zna imenovati bar jedan simbol za brojeve. U skupini četverogodišnjaka najveći postotak djece, njih 46,7% djece čita neke brojeve. Uglavnom su to bili brojevi od 1 do 3 ili od 1 do 5. U skupini petogodišnjaka i u skupini šestogodišnjaka, najveći postotak djece čita sve zadane brojeve.

Tablica 19: Rezultati Kruskall Wallis testa na varijabli čitanje brojava (ČITANJE)

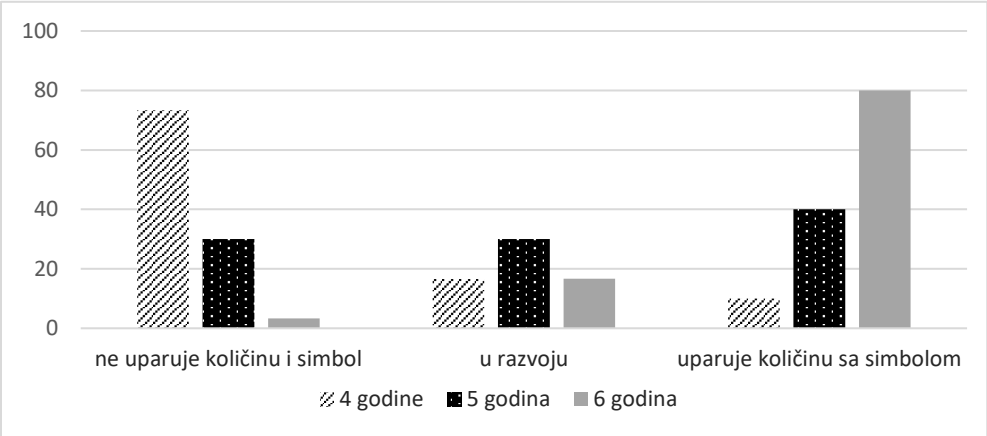
	Zbroj rangova – četverogodišnjaci	Zbroj rangova – petogodišnjaci	Zbroj rangova – šestogodišnjaci	Hi kvadrat	df
ČITANJE	29,57	47,52	59,42	24,818**	2

** razina statističke značajnosti $p < 0,01$
* razina statističke značajnosti $p < 0,05$

Prema rezultatima Kruskall Wallis testa iz tablice 19, postoji statistički značajna razlika između tri dobne skupine na varijabli *čitanje brojeva* (ČITANJE) uz razinu statističke značajnosti $p < 0,01$. Na temelju navedenih rezultata zaključuje se da s porastom dobi raste i broj simbola koje djeca imaju usvojeni. Prema podacima iz literature, sposobnost čitanja brojenja počinje se usvajati u četvrtoj godini, a do kraja predškolskog razdoblja većina djece čita brojeve od 1 do 10 (Boneit i sur, 2013). Rezultati dobiveni ovim istraživanjem odgovaraju podacima iz literature pa tako 69% četverogodišnjaka čita neke ili sve brojeve, a u starijoj kronološkoj dobi ove se vrijednosti povećavaju pa tako krajem predškolskog razdoblja više od 80% djece zna pročitati sve zadane brojeve.

6.1.16 Uparivanje količine i simbola

Graf 15: postotak uspješnosti na zadacima uparivanja količine i simbola



Graf 15 prikazuje postotak uspješnosti na zadacima uparivanja količine i simbola. Iz grafa je vidljivo da većina četverogodišnjaka (više od 70%) ne uparuje simbol i količinu. Nasuprot tome, šestogodišnjaci su u ovom zadatku vrlo uspješni pa tako 80% njih uparuje simbol sa zadanom količinom. Skupina petogodišnjaka je u ovoj kategoriji varijabilna pa je tako gotovo podjednak broj djece koja ne uparuju količinu i simbole i one koja to čine za manje setove. Ipak, najveći je postotak one koja to čine za sve setove (njih 40%).

Tablica 20: Rezultati Kruskall Wallis testa na varijabli uparivanje količine i simbola (SIMBOL)

	Zbroj rangova – četverogodišnjaci	Zbroj rangova – petogodišnjaci	Zbroj rangova – šestogodišnjaci	Hi kvadrat	df
SIMBOL	26,05	45,93	64,52	37,522**	2

** razina statističke značajnosti $p < 0,01$
* razina statističke značajnosti $p < 0,05$

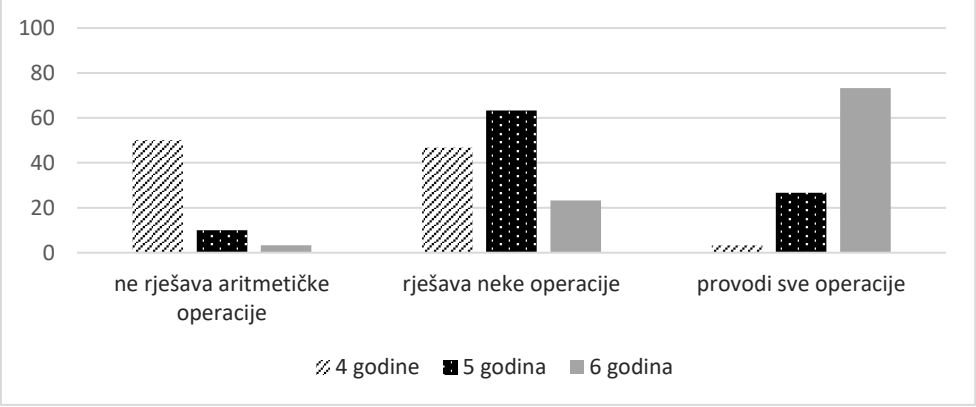
Tablica 20 prikazuje rezultate Kruskall Wallis testa na varijabli uparivanje količine i simbola (SIMBOL). Rezultati pokazuju da postoji statistički značajna razlika između tri dobne skupine u uspješnosti na zadacima uparivanja količine i simbola uz razinu značajnosti $p < 0,01$. Prema navedenim rezultatima skupina, četverogodišnjaka je najmanje uspješna, dok je skupina šestogodišnjaka najuspješnija u rješavanju zadataka iz ove kategorije. Na

uspješnost rješavanja zadataka ovog tipa utječu čimbenici kao što su poznavanje simbola za brojeve i usvojenost kardinalnosti. U prethodnim analizama spomenuto je da mnogi četverogodišnjaci ne imenuju sve brojeve ili nemaju u potpunosti usvojeno načelo kardinalnosti, što je posljedično uvjetovalo visok postotak četverogodišnjaka koji ne uparuju prebrojenu količinu s odgovarajućim simbolom. Skupina petogodišnjaka je najviše neujednačena u uspješnosti rješavanja velikog broja zadataka pa tako i ovog. Budući da je najveći postotak djece riješio sva tri zadatka, a prosječna kronološka dob je 5,04, možemo pretpostaviti da bi u drugoj polovici pete godine razlike između petogodišnjaka i šestogodišnjaka bile manje. Skupina šestogodišnjaka očekivano najuspješnije rješava zadatke iz ove kategorije s visokom postotkom uspješnosti od 80%. Na temelju navedenih rezultata, moguće je zaključiti da se sposobnost uparivanja količine i simbola usvaja krajem pete, odnosno početkom šeste godine.

6.2 Aritmetičke operacije

6.2.1 Rješavanje aritmetičkih operacija uz vizualnu podršku

Graf 16: postotak uspješnosti rješavanja aritmetičkih operacija



Postoci uspješnosti rješavanja zadataka zbrajanja i oduzimanja prikazani u grafu 16 pokazuju da najveći broj četverogodišnjaka (50%) ne rješava uopće aritmetičke operacije ili samo rješava neke od njih (46,7%) Uglavnom se radilo o zbrajanju i oduzimanju s brojem 1. Skupina petogodišnjaka je bila uspješnija pa je tako njih 63% riješilo dva ili tri od ukupno četiri zadana zadatka, a njih 26% je riješilo sve zadatke. U skupini šestogodišnjaka je 73% ispitanika riješilo sve zadatke, zbog čega je ova skupina ostvarila najbolje rezultate.

Tablica 21: Rezultati Kruskall Wallis testa na varijabli aritmetičke operacije (ARTM)

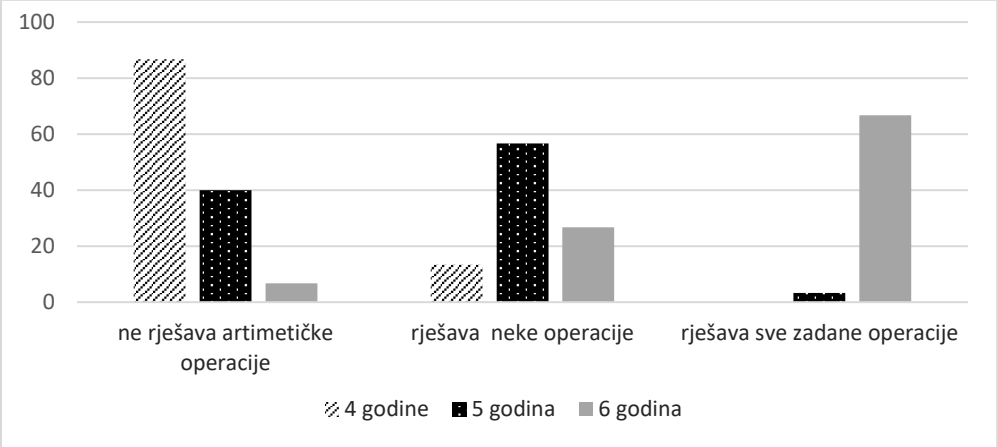
	Zbroj rangova – četverogodišnjaci	Zbroj rangova – petogodišnjaci	Zbroj rangova – šestogodišnjaci	Hi kvadrat	df
ARTM	23,08	45,58	67,83	47,212**	2

** razina statističke značajnosti $p < 0,01$
* razina statističke značajnosti $p < 0,05$

Rezultati Kruskal Wallis testa na varijabli aritmetičke operacije (ARTM) prikazani u tablici 21 pokazuju da postoji statistički značajna razlika između triju dobnih skupina uz razinu statističke značajnosti $p < 0,01$. Navedeni rezultati ukazuju na to da je najstarija skupina ujedno i najuspješnija u rješavanju aritmetičkih operacija. Podaci dobiveni statističkom analizom upućuju na to da se sposobnost rješavanja aritmetičkih operacija počinje razvijati tijekom četvrte godine i to prvenstveno za jednostavne zadatke zbrajanja i oduzimanja s 1. Prema podacima iz literature (Bisanz i sur, 2005; Sarama i Clements, 2009), zadatke zbrajanja i oduzimanja s 1 u setu do 4 objekta, provode već djeca u drugoj polovici treće godine. Između četvrte i pete godine djeca počinju razvijati strategije zbrajanja i oduzimanja pa se sposobnost rješavanja aritmetičkih operacija povećava, stoga počinju rješavati zadatke zbrajanja i oduzimanja do 10 uz vizualnu podršku (Geary, 2006). Ispitanici su u ovom istraživanju pokazali slabije rezultate jer je manje od 50% četverogodišnjaka uspješno riješilo neke od zadanih zadataka. Rezultati ovog istraživanja pokazali su da se sposobnost rješavanja aritmetičkih operacija razvija tek nakon pete godine.

6.2.2 Rješavanje aritmetičkih operacija uz pronalaženje razlike (artimetičke operacije s „kućicama“)

Graf 17: postotak uspješnosti rješavanja aritmetičkih operacija s pronalaženjem razlike



Iz grafa 17 vidljivo je da su šestogodišnjaci jedina skupina koja u velikom postotku (66%) rješava sve zadatke iz kategorije aritmetičkih operacija s pronalaženjem razlike. Skupina četverogodišnjaka pokazuje najniža postignuća s postotkom od 86% djece koja ne rješavaju zadatke iz ove kategorije. Najveći broj petogodišnjaka, njih 56% rješava neke aritmetičke operacije s pronalaženjem razlike. Uglavnom su to bile operacije u kojima je razlika bila 1.

Tablica 22: Rezultati Kruskall Wallis testa na varijabli artimetičke operacije uz pronalaženje razlike

	Zbroj rangova – četverogodišnjaci	Zbroj rangova – petogodišnjaci	Zbroj rangova – šestogodišnjaci	Hi kvadrat	df
ARTM_R	24,50	41,77	70,23	52,380**	2

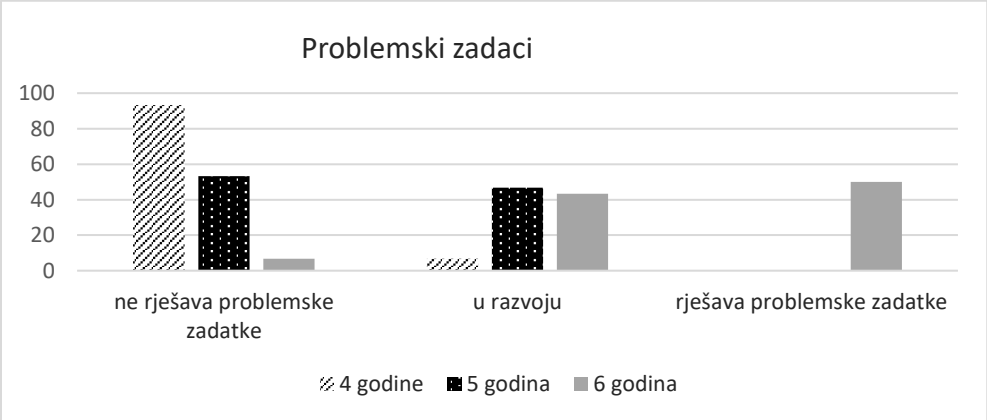
** razina statističke značajnosti $p < 0,01$
* razina statističke značajnosti $p < 0,05$

U tablici 22 prikazani su rezultati Kruskal Wallis testa na varijabli *aritmetičke operacije uz pronalaženje razlike* (ARTM_R). Rezultati pokazuju da postoji statistički značajna razlika između triju dobnih skupina uz razinu statističke značajnosti $p < 0,01$. U ovoj kategoriji je također skupina šestogodišnjaka najuspješnija. Iako je velik broj petogodišnjaka uz manipulaciju uspješno izdvojio količinu koja je bila potrebna da dođu do zadanog rezultata,

nisu shvaćali da broj štapića koji su izdvojili da bi došli do zadanog rezultata ujedno predstavlja i traženu razliku. Iz tog razloga je većina njih na odgovor „Koliko je štapića bilo potrebno da dođeš do __?“ odgovarala tako da je navela konačan rezultat. Sarama i Clements (2009) navode da se sposobnost pronalaženja razlike počinje javljati između četvrte i pete godine, a zadatke ovog tipa rješavaju djeca između pete i šeste godine. Dobiveni rezultati ukazuju na slabije sposobnosti u odnosu na one iz literature jer je samo 13% četverogodišnjaka bilo uspješno u rješavanju nekih zadataka ovog tipa, a većina petogodišnjaka je riješila samo neke od zadanih zadataka. Prema rezultatima iz ovog istraživanja, može se zaključiti da se kod većine ispitane sposobnost pronalaženja razlike u aritmetičkim operacijama razvija tek između pete i šeste godine.

6.3 Problemski zadaci

Graf 18: postotak uspješnosti rješavanja problemskih zadataka



Iz grafa 18 se iščitava da su šestogodišnjaci jedina skupina koja je uspješno riješila sva četiri problemska zadatka. S druge strane, više od 90% četverogodišnjaka i više od 50% petogodišnjaka uopće ne rješava problemske zadatke. U kategoriji *„u razvoju“* nalaze se ispitanici koji su uspješno riješili jedan, dva ili tri problemska zadatka. Najčešće se radilo o problemskim zadacima u kojima je bilo zadano zbrajanje do 5 te oduzimanje s brojem 1. U ovoj kategoriji nalazi se 46% petogodišnjaka i 43% šestogodišnjaka,

Tablica 23: Rezultati Kruskall Wallis testa na varijabli problemski zadaci (PROBLEM)

	Zbroj rangova – četverogodišnjaci	Zbroj rangova – petogodišnjaci	Zbroj rangova – šestogodišnjaci	Hi kvadrat	df
ART_R1	25,93	39,57	71,00	54,777**	2

** razina statističke značajnosti $p < 0,01$
* razina statističke značajnosti $p < 0,05$

Prema rezultatima Kruskal Wallis testa prikazanim u tablici 23 postoji statistički značajna razlika na varijabli *problemski zadaci* (PROBLEM) uz razinu statističke značajnosti $p < 0,01$. Iz tablice se iščitava da je skupina šestogodišnjaka puno uspješnija u rješavanju problemskih zadataka u odnosu na ostale dvije skupine. Na temelju ovih rezultata, ali i rezultata iz grafa 20, zaključuje se da se sposobnost rješavanja jednostavnih problemskih zadataka počinje usvajati u petoj godini i traje sve do kraja šeste godine, što je u skladu s podacima iz svjetske literature (Sarama i Clements, 2009).

6.4 Prepoznavanje oblika

Tablica 24: Rezultati Kruskal Wallis testa za varijablu prepoznavanja oblika (OBLIK)

	Zbroj rangova – četverogodišnjaci	Zbroj rangova – petogodišnjaci	Zbroj rangova – šestogodišnjaci	Hi kvadrat	df
OBLIK	40,53	46,43	49,60	5,849	2

** razina statističke značajnosti $p < 0,01$
* razina statističke značajnosti $p < 0,05$

Iz tablice 24 vidljivo je da na varijabli *prepoznavanje oblika* (OBLIK) ne postoji statistički značajna razlika između tri dobne skupine uz razinu značajnosti od 5% ($p > 0,05$). Navedeni rezultati ukazuju na to da sve tri dobne skupine uspješno prepoznaju sva tri zadana geometrijska lika. Sarama i Clements (2008) navode da 90% djece predškolske dobi prepoznaje i imenuje krug, između 80 i 90% djece prepoznaje i imenuje kvadrat, a trokut imenuje oko 60%. Rezultati dobiveni ovim istraživanjem odgovaraju podacima iz literature, odnosno većina djece do četvrte godine je usvojila imena za tri osnovna geometrijska lika, a to su krug, kvadrat i trokut.

6.5 Razvrstavanje

Tablica 25: Rezultati Kruskall Wallis testa na varijablama iz kategorije razvrstavanja (R1; R2; R3; R4)

	Zbroj rangova – četverogodišnjaci	Zbroj rangova – petogodišnjaci	Zbroj rangova – šestogodišnjaci	Hi kvadrat	df
R1	42,50	47,00	47,00	3,622	2
R2	36,50	45,50	54,50	13,267*	2
R3	36,50	47,00	53,00	10,451*	2
R4	37,50	46,50	52,50	7,289*	2

** razina statističke značajnosti $p < 0,01$
* razina statističke značajnosti $p < 0,05$

U tablici 25 prikazani su rezultati Kruskal Wallis testa na varijablama iz kategorije razvrstavanja. Na svim varijablama, osim na varijabli R1, postoji statistički značajna razlika između tri dobne skupine uz razinu statističke značajnosti $p < 0,05$. Iako razlike među zbrojevima rangova nisu velike, ipak pokazuju na to da se s porastom dobi uspješnost u zadacima razvrstavanja povećava. Podaci iz literature navode da u dobi između treće i šeste godine većina djece bez poteškoća prepoznaje i razvrstava geometrijske oblike (Aktas i Aslan, 2010). Dobiveni rezultati tako odgovaraju podacima iz literature. Valja napomenuti da je na uspješnost rješavanja ovih zadataka utjecala usvojenost imena geometrijskih likova i kapacitet radnog pamćenja. Budući da šestogodišnjaci imaju veći kapacitet radnog pamćenja od četverogodišnjaka i petogodišnjaka, očekivano je da će biti najuspješniji u složenijim zadacima razvrstavanja.

6.6 Mjerenje: zadaci iz kategorije odnosi među likovima

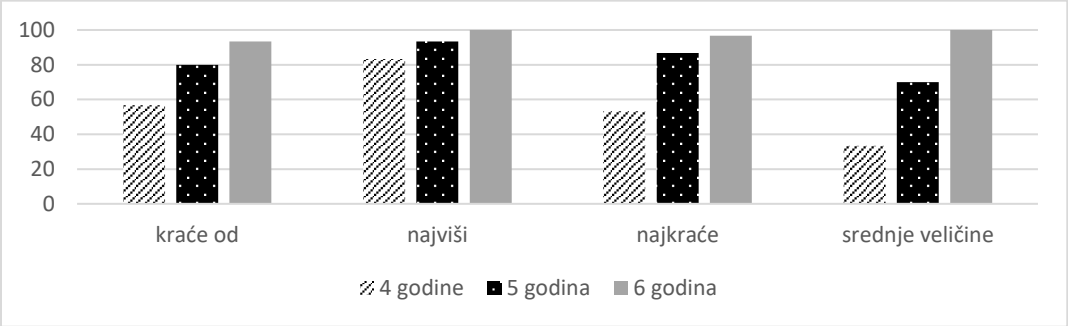
Tablica 26: Rezultati Kruskall Wallis testa na varijablama iz kategorije odnosi među likovima

	Zbroj rangova – četverogodišnjaci	Zbroj rangova – petogodišnjaci	Zbroj rangova – šestogodišnjaci	Hi kvadrat	df
KRAĆE_OD	36,50	47,00	53,00	11,424*	2
NAJNIŽI	37,50	49,50	49,50	13,109*	2
NAJKRAĆE	34,00	49,00	53,50	18,431**	2
SREDNJE	30,00	46,50	60,0	30,287**	2

** razina statističke značajnosti $p < 0,01$
* razina statističke značajnosti $p < 0,05$

U tablici 26 prikazani su rezultati Kruskall Wallis testa na varijablama iz kategorije *odnosi među likovima* kod kojih se je bila prisutna statistički značajna razlika. Rezultati pokazuju da postoji statistički značajna razlika između tri dobne skupine na samo četiri varijable. Statistički značajna razlika uz razinu značajnosti $p < 0,05$ postoji na varijablama razumijevanja sintagme *kraće od* (KRAĆE_OD) i pojma *najviši* (NAJVIŠI). Na varijablama razumijevanje pojma *najkraće* (NAJKRAĆE) i sintagme *srednje veličine* (SREDNJE) postoji statistički značajna razlika na razini $p < 0,01$. Dobiveni rezultati ukazuju na to da je skupina šestogodišnjaka uspješnija od skupina niže kronološke dobi u razumijevanju sintagme za uspoređivanje „kraće od“ te u razumijevanju pojmova za označavanje visine „najviši“, duljine „najkraće“ i veličine „srednje veličine“. Na ostalim varijablama su sve tri dobne skupine bile podjednako uspješne, što upućuje na to da su ostali pojmovi za izražavanje odnosa među likovima usvojeni u dobi od četiri godine. Deskriptivna analiza varijabli koje su se pokazale statistički značajne prikazana u grafu 19 pokazuje da unatoč postojanju statistički značajnih razlika, većina djece iz skupine petogodišnjaka i šestogodišnjaka razumije pojmove „najviši“ i „najkraće“ te sintagma „kraće od“ i „srednje veličine“. Četverogodišnjaci pokazuju uspjeh od 83% na razumijevanju pojma „ najviši“, što upućuje na to da je i ovaj pojam usvojen u dobi od četiri godine. Visoki postoci od >50% na razumijevanju sintagme „kraće od“ i pojma „najkraće“, navode na zaključak da se i one počinju usvajati u četvrtoj godini, a kod većine djece su usvojene u petoj godini. Iz grafa 20 je vidljivo da se razumijevanje sintagme „srednje veličine“ najkasnije javlja,kod većine djece (> 70%) u dobi od pet godina.

Graf 19 : Postoci razumijevanja pojmova najviši“, duljine „najkraće“ i sintagma „kraće od“ i „srednje veličine“



6.7 Matematički obrasci

Graf 20 : Postoci uspješnosti rješavanja zadataka iz kategorije nastavljanje obrasca

U grafu 20 je vidljivo da se s porastom zahtjeva smanjuje uspješnost rješavanja zadataka iz domene matematičkih obrazaca. Nadalje, s porastom dobi se povećava uspješnost rješavanja zadataka pa tako više od 60% šestogodišnjaka rješava sve zadane zadatke dok u skupini petogodišnjaka i šestogodišnjaka to čini vrlo mali postotak. Najveći broj četverogodišnjaka (53%) nastavlja samo niz od dva element, njih 20% rješava niz od tri i četiri elementa, a ostalih 28% uopće ne rješava zadatke ovog tipa. Najveći broj petogodišnjaka (70%) također nastavlja niz s dva elementa, a samo 20% rješava zahtjevnije nizove.

Tablica 27: Rezultati Kruskall Wallis testa na varijablama iz kategorije nastavljanje obrasca

	Zbroj rangova – četverogodišnjaci	Zbroj rangova – petogodišnjaci	Zbroj rangova – šestogodišnjaci	Hi kvadrat	df
NIZ1	36,00	43,50	57,00	17,442**	2
NIZ2	33,50	42,50	60,50	23,074**	2
NIZ3	34,00	41,50	61,00	26,061**	2

** razina statističke značajnosti $p < 0,01$
* razina statističke značajnosti $p < 0,05$

Tablica 27 prikazuje rezultate Kruskall Wallis testa na varijablama iz kategorije nastavljanja obrazaca. Rezultati pokazuju da postoji statistički značajna razlika između tri dobne skupine na sve tri varijable uz statističku značajnost $p < 0,01$. Iz ovih rezultata se zaključuje da s porastom dobi raste i uspješnost u rješavanju ovih zadataka pa su tako šestogodišnjaci najuspješniji u nastavljanju niza prema zadanom obrascu. Osim toga, zbrojevi rangova pokazuju da su između petogodišnjaka i šestogodišnjaka veće razlike nego između četverogodišnjaka i petogodišnjaka. Podaci iz grafa i tablice navode na zaključak da u četvrtoj godini djeca tek počinju uočavati pravilnosti u obrascima te ih izražavati kroz nastavljanje niza, no u tome postaju uspješni tek u šestoj godini. Dobiveni rezultati su u skladu s podacima iz literature koji govore da u dobi od četiri godine djeca počinju shvaćati kako se tvore obrasci te počinju kopirati i nastavljati iste (Rittle Johnson, Fye i McLean, 2013). Kada se zbroje postoci petogodišnjaka koji su riješili dio zadatka i onih koju su riješili sve, dobije se postotak od 56% djece koja uspješno rješavaju niz od tri elementa. Do kraja pete godine bi taj postotak bio veći, stoga možemo zaključiti da se ovi rezultati također poklapaju s podacima iz literature (Sarama i Clements, 2009). Što se tiče šestogodišnjaka dobiveni rezultati potvrđuju podatke iz literature koji govore da šestogodišnjaci nastavljaju niz od četiri elementa (Sarama i Clements, 2009).

7 POTVRDA PRETPOSTAVKI

U skladu s postavljenim ciljem i problemom istraživanja, postavljene su dvije pretpostavke:

P1: Postojat će statistički značajne razlike u uspješnosti rješavanja zadataka između skupina djece u dobi od četiri, pet i šest godina u sljedećim kategorijama:

- ***Broj i usvajanje brojenja*** na varijablama: automatizirano brojenje do 30, kardinalnost, prebrojavanje skupa, prepoznavanje grešaka, ordinalnost – druga skupina zadataka , konzervacija – ista količina, brojenje od zadanog broja i u intervalu,brojenje unatrag od 10, brojenje po sekvencama čitanje brojeva te uparivanje količine i simbola
- ***Aritmetičke operacije***
- ***Problemski zadaci***
- ***Matematički obrasci*** na varijablama: obrasci s tri i obrasci četiri elementa
- ***Ukupni rezultat***

Prva pretpostavka se u potpunosti prihvaća budući da su rezultati statističke obrade pokazali da na svim navedenim varijablama postoji statistički značajna razlika u ukupnim rezultatima između tri dobne skupine.

P2: Šestogodišnjaci će biti najuspješniji u rješavanju zadataka.

Druga pretpostavka također se u potpunosti prihvaća budući da su rezultati statističke obrade pokazali da na skupina šestogodišnjaka jedina rješava sve zadatke i postiže prosječno najviše rezultate.

8 ZAKLJUČAK

Mnoga matematička znanja mogu se primijetiti i u svakodnevnim aktivnostima djece predškolske dobi. Istraživanja su pokazala da matematička znanja u predškolskoj dobi mogu predvidjeti razinu matematičkih znanja u školskoj dobi (Duncan i sur, 2007; Mazzoco i Thompson, 2005). Zbog toga se već dugi niz godina pridaje važnost praćenju razvoja matematičkih vještina i razvijanju kvalitetnijeg sustava podučavanja u domeni matematike u predškolskoj dobi. Matematička znanja mogu se podijeliti na dva područja, a to su nesimbolička matematička znanja i simbolička matematička znanja. Kroz istraživanje prikazano u ovom radu, ispitivala su se simbolička matematička znanja kroz tri područja, a to su aritmetika, geometrija i algebra. Budući da su većina podataka o ranim matematičkom znanjima dolazi iz zemalja engleskog govornog područja, istraživanjem prikazanim u ovom radu nastojalo se otkriti koja su matematička znanja u određenoj dobi karakteristična za djecu u dobi od četiri do šest godina u Hrvatskoj.

U području aritmetike ispitane su vještine brojenja, aritmetičke operacije i problemski zadaci. Dobiveni rezultati pokazali da postoje statistički značajne razlike u gotovo svim ispitanim kategorijama, iz čega se zaključuje da se s porastom dobi povećava razina matematičkih znanja što pospješuje uspješnost rješavanja matematičkih zadataka. Skupina šestogodišnjaka je bila jedina koja je u većem broju uspješno riješila sve zadane zadatke, što pokazuje da je do kraja predškolskog razdoblja većina djece usvojila sva matematička znanja koja su bila ispitana u ovom radu.

Detaljnije analize varijabli su pokazale da u dobi od četiri godine velik broj djece broji do 10, ima usvojeno načela pridruživanja 1 na 1 i načelo kardinalnosti, što odgovara podacima iz literature prema kojima su navedene vještine usvojene u četvrtoj godine (Klein i Starkey, 1997; prema Vlahović Štetić i Kovačić, 1997). Bez obzira na postojanje statistički značajnih razlika više od 60% četverogodišnjaka u ovom istraživanju je uočilo greške ponavljanja i preskakanja broja u brojenju ispitivača. Ovaj podatak je zanimljiv jer literatura navodi da se uočavanje grešaka razvija tek u petoj godini (Sarama i Clements, 2009). Petogodišnjaci pokazuju bolje rezultate u odnosu na četverogodišnjake na zadacima iz prethodno navedenih područja, ali počinju razvijati i neke druge vještine. Vještine koje su kod njih bile puno razvijenije u odnosu na četverogodišnjake su: prebrojavanje podskupa unutar većeg skupa, izdvajanje broja koji dolazi prije ili nakon zadanog broja, brojenje unatrag od 10, čitanje brojeva i uparivanje broja s odgovarajućom količinom. Navedeni podaci su također u skladu s

onima iz literature koji govore da se ove vještine usvajaju tijekom pete godine (Sarama i Clements, 2009; Montague – Smith i sur, 2018). Iako je svega 30% petogodišnjaka uspješno riješilo zadatak brojenja od zadanog broja, a 20% zadatak brojenja u zadanom intervalu, za ovu vještinu se također može reći da se usvaja tijekom pete godine, budući da ni jedan četverogodišnjak nije riješio ove zadatke. Što se tiče čitanja brojeva, više od 60% čita neke brojeve, međutim svega dvadesetak posto četverogodišnjaka uparuje brojeve s odgovarajućom količinom. Skupina šestogodišnjaka je u odnosu na obje mlađe dobne skupine ostvarivala puno više rezultate u kategoriji broja i brojenja, pa tako u svim zadacima ima uspješnost rješavanja preko 80%. Varijable u kojima je bila najveća razlika između šestogodišnjaka i petogodišnjaka bile su brojenje po sekvencama i načelo konzervacije što je u skladu s podacima iz literature koji navode da se ove vještine razvijaju u šestoj godini (Montague - Smith i sur., 2018).

Aritmetičke operacije djeca počinju provoditi između četvrte i pete godine uz pomoć konkretnih objekata, a do kraja šeste godine nauče koristiti razne strategije koje im omogućuju brže rješavanje zadataka zbrajanja i oduzimanja (Geary, 2006). U ovom istraživanju polovica četverogodišnjaka nije riješila aritmetičke operacije. Druga polovica ih je uspješno riješila, a ove brojke se povećavaju u skupini petogodišnjaka, stoga se može zaključiti da dobiveni podaci odgovaraju onima iz literature. Zadaci aritmetičkih operacija uz pronalaženje razlike bili su zahtjevniji, zbog čega ih većina četverogodišnjaka nije riješila, no polovica petogodišnjaka je riješila neke od njih, a više od 60% šestogodišnjaka ih je riješilo sve. Razumijevanje broja i aritmetičkih operacija temelji su za rješavanje problemskih zadataka (Sarama i Clements, 2009), stoga je vještina rješavanja problemskih operacija kod gotovo 90% djece uočena u šestoj godini.

U području geometrije bila je ispitano prepoznavanje geometrijskih likova i uspoređivanje zadanih likova prema veličini, visini i dužini. U tim kategorijama nije bilo statistički značajne razlike, što znači da sve tri dobne skupine gotovo jednako uspješno rješavaju zadatke toga tipa. Ovi rezultati odgovaraju standardima iz literature prema kojima djeca u predškolskoj dobi uspješno prepoznaju krug, kvadrat i trokut (Sarama i Clements, 2008) te pokazuju razumijevanje svrhe mjerenja kroz označavanje objekata koji su veći, viši ili duži od referentnog objekta (MacDonald, 2010).

Područje algebre najmanje je istraživano, a u predškolskoj dobi očituje se kroz nastavljanje ili kopiranje matematičkih obrazaca. U ovom istraživanju se poznavanje matematičkih obrazaca ispitivalo kroz nastavljanje obrasca s dva, tri i četiri elementa. Istraživanja navode da se

nastavljanje jednostavnih obrazaca s dva elementa javlja s četiri godine (Rittle-Johnson i sur., 2015), a do kraja predškolske dobi djeca mogu uspješno nastaviti obrasce koji sadrže četiri elementa te izdvojiti najmanji element obrasca (Sarama i Clements, 2009). Rezultati ovog istraživanja su se poklapali s onima iz literature. Više od 70% četverogodišnjaka nastavilo je niz s dva elementa. U skupini petogodišnjaka je također 70% petogodišnjaka nastavilo niz od dva elementa, a preko 50% je nastavilo niz od tri elementa. Šestogodišnjaci su bili najuspješniji pa je tako najteži zadatak, onaj s četiri elementa, riješilo više od 60% ispitanika.

U odnosu na ukupnu populaciju djece od četvrte do šeste godine u Hrvatskoj, ovaj je uzorak bio malen i obuhvaćao je djecu koja žive i uče u vrlo sličnim uvjetima, stoga se na temelju ovih podataka ne mogu stvoriti norme koje bi odredile koja matematička znanja moraju biti usvojena u određenoj dobi. Međutim, rezultati ovog istraživanja ipak mogu pomoći stvaranju okvirne slike postignuća u matematici u predškolskoj dobi jer daju prikaz različitih domena matematičkog mišljenja. U budućnosti bi bilo korisno učiniti istraživanja na većem uzorku koji obuhvaća djecu iz različitih sredina ili uzorku u kojem se nalaze djeca mlađe kronološke dobi kako bi se dobili podaci koji bi logopedima u praksi omogućili stvaranje razvojnih miljokaza o usvojenosti matematičkih znanja. Tako bi se u vrlo ranoj dobi mogla izdvojiti djeca koja pokazuju određena razvojna odstupanja te prepoznati obilježja diskalkulije u svrhu prevencije nastanka teškoća.

9 POPIS LITERATURE

1. Aslan, D. i Aktas, Y. (2010). Children's Classification of Geometric Shapes. *Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi, 19*, 254 – 270.
2. Benoit, L., Lehalle, H., Molina, M., Tijus, C. i Jouen, F. (2013). Young children's mapping between arrays, number words, and digits. *Cognition, 129*, 95-101.
3. Bertoncini, J., Bijeljac – Babic, R., Jusczyk, P.W., Kennedy, L.J. i Mehler, J. (1988). An Investigation of Young Infants' Perceptual Representations of Speech Sounds. *Journal o Experimental Psychology, 117,* 21-33.
4. Bisanz, J., Sherman, J., Rasmussen, C. i Ho, E. (2005). Development of Arithmetic Skills and Knowledge in Preschool Children. u: Campbell, J. I. D (Ur). *Handbook of Mathematical Cognition* (str. 143 – 162) New York: Psychology Press.
5. Butterworth, B. (2005). The development of arithmetical abilities. *Journal of Child Psychology and Psychiatry, 46*, 3-18.
6. Chigeza, P. i Sorin, R. (2016). Kindergarten Children Demonstrating Numeracy Concepts through Drawings and Explanations: Intentional Teaching within Play-based Learning. *Australian Journal of Teacher Education, 41*, 65 - 77.
7. Clements, D. H. i Sarama, J. (2000). Young children's ideas about geometric shapes. *The National Council of Teachers of Mathematics, 6,* 482 – 488.
8. Deheane, S., Piazza, M., Pinel, P. i Cohen, L. (2003). Three parietal circuits for number processing. *Cognitive Neuropsychology, 20*, 487–506.
9. Deheane, S. (2011). *The Number Sense: How the Mind Creates Mathematics, revised and updated Edition* : New York: Oxford University Press.
10. Duncan, G. J. i sur. (2007). School Readiness and Later Achievement. *Developmental Psychology*, 43, 1428–1446.
11. Geary, D. C. (1994). *Children's mathematical development: Research and practical applications.* Washington, DC: American Psychological Association.
12. Geary, D. C. (2006). Development of mathematical understanding. u: Damon, W. i Lerner, R. M. (Ur). *Handbook of Child Psychology* (str. 777 – 804). New York: Wiley.
13. Giralt, N. i Bloom, P. (2000). How Special are Objects? Children's Reasoning About Objects, Parts, and Holes. *Psychological Science, 11*, 497-501.
14. Halat, E. i Dagli, U. Y. (2016). Preschool Students' Understanding of a Geometric Shape, the Square. *Bolema, 30,* 830 - 848.

15. Halberda, J. i Feigenson, L. (2008). Developmental Change in the Acuity of the "Number Sense": The Approximate Number System in 3-, 4-, 5-, and 6-Year-Olds and Adults. *Developmental Psychology, 44*, 1457-1465.
16. Hyde, D. C., Boas, D.A., Blair, C. i Carey, S. (2010). Near-infrared spectroscopy shows right parietal specialization for number in pre-verbal infants. *Neuroimage. 53(2*), 647-652.
17. Izard,V., Sann, C., Spelke, E. S. i Steri, A. (2009). Newborn infants perceive abstract numbers. *Proceedings of the National Academy of Sciences in the United States of America. 106 (25),* 10382–10385.
18. Klasnić, I. (2009). Problemski zadaci – kako ih rješavaju uspješni i neuspješni učenici. *Odgojne znanosti, 11*, 143 – 153.
19. Libertus, M. E., Feigenson, L. i Halberda, J. (2011). Preschool acuity of the approximate number system correlates with school math ability. *Developmental Science 14 (6),* 1292–1300.
20. Liebeck, P. (1984). *Kako djeca uče matematiku: metodički priručnik za učitelje razredne nastave*. Zagreb: Educa.
21. MacDonald, A. (2010). Young Children's Measurement Knowledge: Understandings about Comparison at the Commencement of Schooling. U: Sparrow, L. Kissane, B. i Hurst, C. (Ur.), *Shaping the future of mathematics education: Proceedings of the 33rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia,* (str. 375 – 381). Fremantle: Merga.
22. MacDonald, A. (2011). Young children's representations of their developing measurement understandings, *Mathematics: Traditions and [new] Practices, 1*, 420–490.
23. Mazzocco, M. M. i Thomspon, R. E. (2005). Kindergarten Predictors of Math Learning Disability. *Learning Disabilities Research and Practice, 20*, 142-155.
24. Montague Smith, A., Cotton, T., Hansen, A. i Price, A.J. (2018). *Mathematics in Early Years Education, fourth edition.* New York: Routledge.
25. Mulligan, J. i Mitchelmore, M. C. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal, 21,* 33-49.
26. Pavlin-Bernardić, N., Rovan, D. i Vlahović-Štetić, V. (2011). Kad u matematici "više" zapravo znači "manje": Analiza uspješnosti u rješavanju problemskih zadataka usporedbe. *Psihologijske teme, 20*, 115 – 130.

27. Purpura, D. J., & Lonigan, C. J. (2015). Early numeracy assessment: The development of the preschool early numeracy scales. *Early Education and Development, 26*, 286–313.
28. Riley, M. S., Greeno, J. G. i Heller, J. I. (1983). Development of children'sproblem-solving ability in arithmetic. u Ginsburg, H. (Ur.) *The Development of Mathematical Thinking* (str. 153- 196). Waltham: Academic Press.
29. Rittle-Johnson, B., Fye, E.R. i McLean, L.E. (2013). Emerging Understanding of Patterning in 4-Year-Olds. *Journal of cognition and development, 14*, 375–395.
30. Rittle-Johnson, B. i Fyfe, E. R., Loehr, A. M. i Miller, M.R. (2015). Beyond numeracy in preschool: Adding patterns to the equation. *Early Childhood Research Quarterly, 31*, 101-112.
31. Sarama, J. i Clements, D. H. (2008). Mathematics in Early Childhood. U: Saracho, O. I Spodek, B. (Ur), *Contemporary Perspectives on Mathematics in Early Childhood Education* (str. 67 – 94), Charlotte: Information Age Publishing.
32. Sarama, J. i Clements D. H. (2009). *Early Childhood Mathematics Education Research: Learning Trajectories for Young Children*. New York: Routledge.
33. Shipley, E. F. i Shepperson, B. (1990). Countable entities: Developmental changes. *Cognition, 34*, 109-136.
34. Slaughter, V., Itakura, S., Kutsuki, A. i Siegal, M. (2011). Learning to count begins in infancy: evidence from 18-month-olds' visual preferences. *Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences, 278 (1720).* 2979-2984.
35. Starr, A., Libertus, M. E. i Brannon E. M. (2013). Number sense in infancy predicts mathematical abilities in childhood. *Proceedings of the National Academy of Sciences in the United States of America, 110*, 186116 – 18120.
36. Starkey , P. i Cooper , R. G. Jr. (1980). Perception of numbers by human infants . *Science*, *210* ,1033 – 1035.
37. Szkudlarek, E. and Brannon E. M. (2017). Does the approximate number system serve as a foundation for symbolic mathematics?. *Language Learning and Development, 13(2).* 171–190.
38. van de Rijt, B. A. M., Van Luit, J. E. H., & Pennings, A. H. (1999). The construction of the Utrecht Early Mathematical Competence Scales. *Educational and Psychological Measurement, 59*, 289–309.
39. Vasta, R., Haith, M. M. i Miller, S. A. (1998). *Dječja psihologija*. Jastrebarsko: Naklada Slap.

40. Vlahović-Štetić, V., Kovačić, S. (1997.). Kognitivna reprezentacija brojeva u djece različite dobi. *Društvena istraživanja*, *4*, 563-577.
41. Vlahović-Štetić, V. i Vizek Vidović, V. (1998.). *Kladim se da možeš… – psihološki aspekti početnog poučavanja matematike*. Zagreb: Udruga roditelja Korak po korak
42. Vukovic, R. K. i Lesaux, N. K. (2013). The relationship between linguistic skills and arithmetic knowledge. *Learning and Individual Differences 23,* 87–91.
43. Weiland, C., Wolfe, C. B., Hurwitz, M. D., Clements, D. H., Sarama, J. H. i Yoshikawa, H. (2012). Early mathematics assessment: validation of the short form of a prekindergarten and kindergarten mathematics measure. *Educational Psychology, 32,* 311-333.
44. Wynn, K. (1992). Addition and subraction by human infants. *Nature, 358,* 749-750.
45. Xu, F. i Spelke, E. S. (2000). Large number discrimination in 6-month-old infants. *Cognition, 74 (1),* B1- B11

9.1 Internetski izvori

1. Hrvatska enciklopedija, 2009, http://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?id=3843, pristupljeno 29.7.2018.
2. Hrvatska enciklopedija, 2009, http://www.enciklopedija.hr/Natuknica.aspx?ID=1701, pristupljeno 29.7.2018.
3. Hrvatska enciklopedija, 2009, http://www.enciklopedija.hr/Natuknica.aspx?ID=21705, pristupljeno 29.7.2018.
4. Odić, D. i Starr, A. (2018). An Introduction to the Approximate Number System. *Child Development Perspectives,* https://www.researchgate.net/publication/324416784_An_Introduction_to_the_Approximate_Number_System, pristupljeno 31.7.2018.
5. Rittle-Johnson, B., Zippert, E. L. i Boice, K. L. (2018). The roles of patterning and spatial skills in early mathematics development. *Early Childhood Research Quarterly,* https://www.researchgate.net/publication/324135750_The_roles_of_patterning_and_spatial_skills_in_early_mathematics_development, pristupljeno 14.8.2018.
6. van Luit J.E.H., van de Rijt, B.A.M. i Hasemann, K. (2001). *Osnabrücker Test zur Zahlbegriffsentwicklung (OTZ),* https://www.uni-frankfurt.de/51726720/Diagnostik_I__Rechenschw__che_Kriterien_und_Tests.ppt, pristupljeno svibanj, 2018.

10 PRILOG

10.1 Zadaci korišteni za ispitivanje ranih matematičkih znanja

RAZVRSTAVANJE PREMA ZAJEDNIČKIM OBILJEŽJIMA

1. Stavi u kutiju sve krugove.
2. Stavi u kutiju samo male kvadrate
3. Stavi u kutiju samo plave trokute.
4. Stavi u kutiju male zelene kvadrate.

Napomena: Tijekom ispitivanja koriste se stvarni predmeti istovjetni prikazanima na slici.

KARDINALNOST

5. Reci mi koliko je šalica na slici?

[1]

6. Reci mi koliko je ptica na slici?

[2]

7. Reci mi koliko je leptira na slici?

[3]

[1] https://banner2.kisspng.com/20180314/hqe/kisspng-coffee-cup-hot-chocolate-mug-clip-art-free-coffee-cup-clipart-5aa8f989005cd2.8941532015210233690015.jpg, uređeno u programu Paint.Net, svibanj 2018.
[2] http://images.clipartpanda.com/birdie-clipart-bird-20clipart-clip_art_bird_green_T.png , uređeno u programu Paint.Net, svibanj 2018.
[3] https://freeclipartimage.com//storage/upload/butterfly-clip-art/butterfly-clip-art-89.jpg, svibanj 2018.

PREBROJAVANJE SKUPA

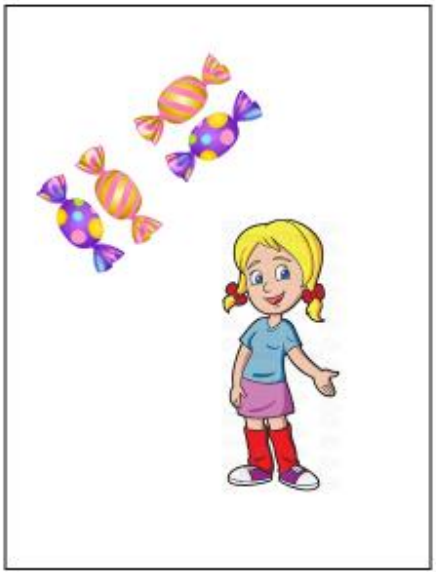
8. Reci mi koliko je mačaka na slici?

4

[4] https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcRNQEo14IMhFWZqzsbPaeKARzNrXLU6BcB5Hif9OCh_dNLaRFKh4w ; https://i.pinimg.com/originals/1d/05/3d/1d053d4aa82887fca88158c7d853a383.jpg ; https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcTKWt_7gu_o0ZaJTrFPTFI6aSjxSAEi5GnYeAQOtWJMKve_yuY6hA ; https://carwad.net/sites/default/files/funny-cat-cartoon-pictures-145173-9589048.jpg ; http://clipartmag.com/dog-clipart-cartoon#dog-clipart-cartoon-39.png; https://st.depositphotos.com/2400497/2908/v/450/depositphotos_29088685-stock-illustration-cartoon-dog.jpg ; https://usercontent2.hubstatic.com/7780333.jpg , uređeno u programu PaintNet, svibanj 2018.

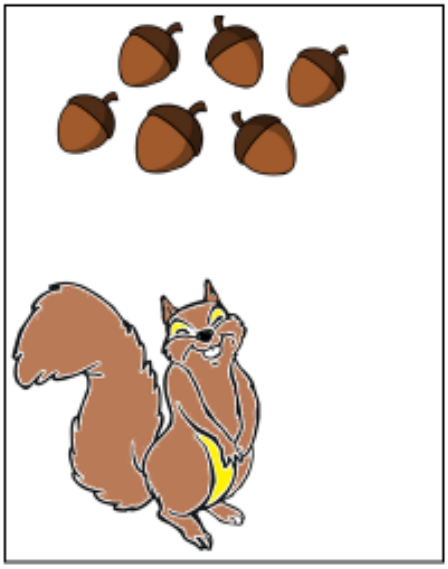
USPOREDBA KOLIČINE

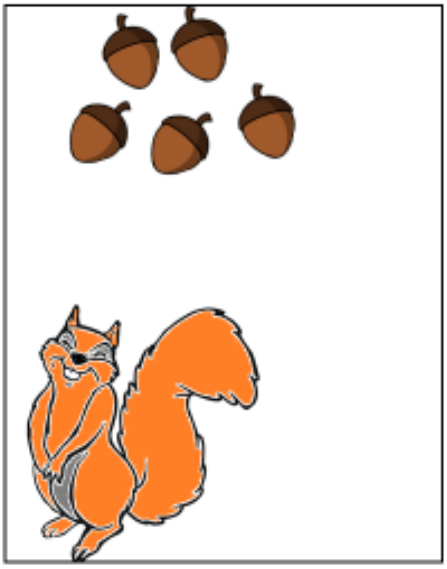
9. Tko ima više bombona, dječak ili djevojčica?



[5]

10. Koja vjeverica ima više žireva, smeđa ili narančasta?



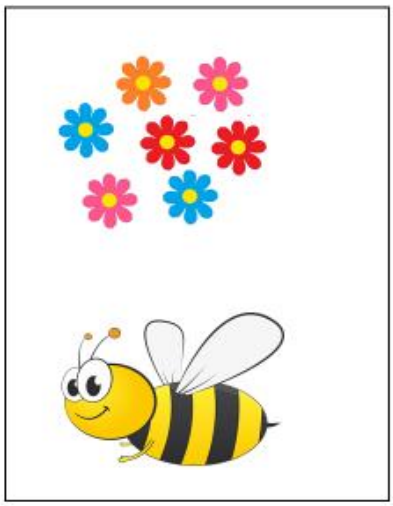


[6]

[5] https://png.pngtree.com/element_origin_min_pic/16/11/01/78bcfa3d7ea8b67d5dc71a94b355273c.jpg ; https://i.pinimg.com/originals/35/9c/70/359c7053886974728c659eee24c9f621.jpg; https://vectortoons.com/wp-content/uploads/2015/07/middle-school-girls-collection-002.jpg ; https://gallery.yopriceville.com/var/resizes/Free-Clipart-Pictures/Sweets-PNG/Candy_Transparent_PNG_Clip_Art.png?m=1507172109 , svibanj 2018.

[6] http://getdrawings.com/images/funny-squirrel-drawing-34.png ,uređeno u programu Paintnet, svibanj 2018.; https://openclipart.org/detail/17617/cartoon-acorn uređeno u programu Paintnet, svibanj, 2018.

11. Tko ima više cvjetova, bubamara ili pčela?



[7]

BROJENJE

12. Možeš li mi brojiti do broja 10?
13. Možeš li brojiti od broja 3 nadalje?
14. Možeš li brojiti od broja 4 do broja 9?
15. Možeš li brojiti do broja 30?
16. Možeš li brojiti unatrag od broja 10?
17. Možeš li brojiti tako da preskočimo neke brojeve? Na primjer 2,4,6.. Koji su brojevi dalje ako tako preskačemo?

[7] http://www.pngmart.com/files/6/Red-Ladybug-Transparent-Background-291x279.png, svibanj 2018. ; http://worldartsme.com/images/pink-flower-clipart-1.jpg , uređeno u programu Paintnet , svibanj 2018; https://cdn.pixabay.com/photo/2015/03/17/08/25/bee-677330_960_720.png, svibanj 2018

ČITANJE BROJEVA

18. Reci koji je ovo broj:

6 1 7 5

2 8 10 3

PRIDRUŽIVANJE

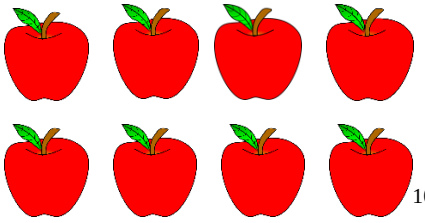
19. Pokaži broj točkica koji odgovara broju predmeta na slici

[8] https://openclipart.org/image/800px/svg_to_png/18072/lescinqailes-bicycle.png, svibanj 2018.

20.

[9]

21.

 [10]

22. Svaki dječak treba dobiti jedan sladoled. Ima li dovoljno sladoleda za sve dječake?

Koliko nedostaje?

[11]

[12]

[13]

[9] https://i.pinimg.com/originals/90/32/08/90320871a3ef5c86ef46b7d3f98a4328.jpg, svibanj 2018

[10] http://moziru.com/images/small-clipart-red-apple-2.png, , svibanj 2018.

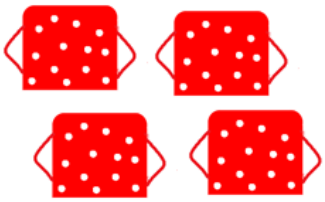
[11] https://i.pinimg.com/736x/8e/27/b9/8e27b97fc60e2d058098c5dc919e32db--young-and-clipart.jpg, svibanj 2018.

[12] https://png.pngtree.com/element_origin_min_pic/16/11/07/2fcae77c93bbd09a54eb73b28a15c05c.jpg, svibanj 2018.

[13] https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcQ63ONVqkF9il_gT8k5aqI9qT_YKtrUyEhpz7TuINXijVyqU9-b , svibanj 2018.

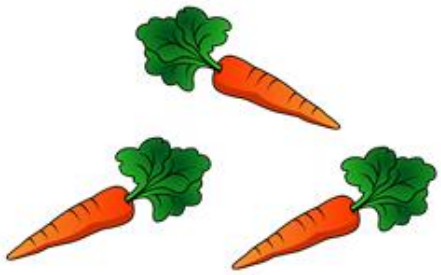
23. Svaki snjegović treba imati jedan lonac na glavi. Ima li dovoljno lonaca za sve snjegoviće?
Je li ostalo još lonaca?

14



24. Svaki zec treba dobiti jednu mrkvu. Ima li dovoljno mrkvi za sve zečeve?
Koliko mrkvi nedostaje?

15

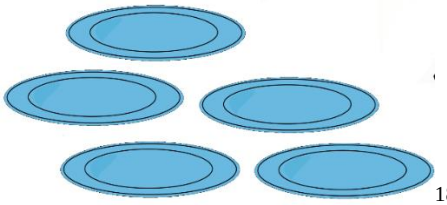


16

[14] https://clipartion.com/wp-content/uploads/2015/10/snowman-clipart-border-free-clipart-images.jpeg, svibanj 2018.
[15] https://i.pinimg.com/originals/76/01/4c/76014cb744ed974b3c1ec3d1e688c2f0.png ; https://www.lhm.org.uk/wp-content/uploads/2017/03/73c113cedda1a50b2be726554aaf9d31_bunny-rabbit-and-rabbit-clipart-rabbit-cartoon_320-320.png ; https://image.shutterstock.com/image-photo/cartoon-brown-rabbit-260nw-495612505.jpg ; http://milwaukeepaindoctors.com/wp-content/uploads/2018/07/special-bunny-cartoon-pic-cute-little-sitting-stock-vector-irwanjos2-161851862-150x150.jpg , uređeno u programu PaintNet, svibanj 2018.
[16] https://img.clipartxtras.com/3c335d6c945ec02873d981e4642b972a_carrot-clipart-14197-carrot-clipart-transparent-background_960-443.png, uređeno u programu PaintNet, svibanj 2018.

25. Na svaki tanjur ide jedan kolač. Ima li dovoljno tanjura za sve kolače? Je li ostalo praznih tanjura?

17



18

ORDINALNOST

Pogledaj sliku i pokaži mi:

19

20

21

22

23

26. Što je **prvo** nacrtano?

27. Što je **zadnje** nacrtano?

28. Što je nacrtano **u sredini**?

---

[17] https://img.etsystatic.com/il/5405a0/1032193396/il_570xN.1032193396_gg5b.jpg?version=1 , uređeno u programu PaintNet, svibanj 2018.
[18] http://worldartsme.com/images/meal-plate-clipart-1.jpg , uređeno u programu PaintNet, svibanj 2018.
[19] https://img.clipartxtras.com/77565dee1010c4511bf0876b63c605fa_transparent-pirate-clipart-pirate-clipart-transparent-background_579-452.jpeg, svibanj 2018.
[20] http://images.clipartpanda.com/flower-clip-art-HakanL_Simple_Flower_Clip_Art.png, uređeno u programu PaintNet, svibanj 2018.
[21] http://worldartsme.com/images/clip-art-of-real-cars-clipart-1.jpg, svibanj 2018.
[22] https://img.clipartxtras.com/cd5b6418fcaac84ef99cf49a70671d8b_teddy-bear-clipart-transparent-pencil-and-in-color-teddy-bear-teddy-bear-clipart-transparent_715-1082.png, svibanj 2018.
[23] http://worldartsme.com/images/sweet-candy-clipart-1.jpg, svibanj 2018.

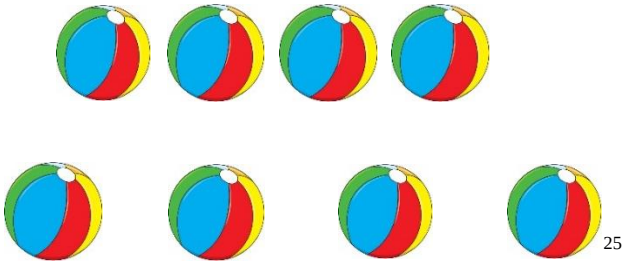
29. Koji broj dolazi poslije broja 2?
30. Koj broj dolazi poslije broja 7?
31. Koji broj dolazi prije broja 5?
32. Koji broj dolazi prije broja 8?

KONZERVACIJA

33. Je li u oba reda isti broj zvijezda?

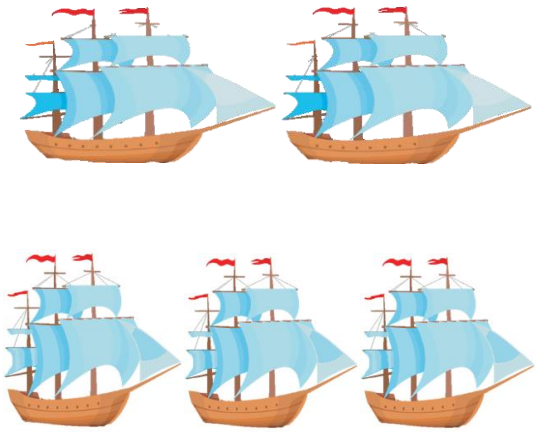
[24]

34. Je li u oba reda isti broj lopti?

 [25]

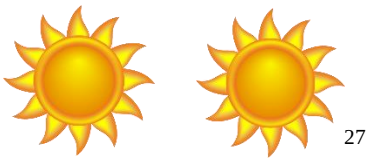
[24] http://images.clipartpanda.com/clipart-star-yckBEbKcE.png, svibanj 2018.
[25] https://i.pinimg.com/236x/02/f0/0e/02f00e1bab62640526661128f44d705a--beach-ball-school-pictures.jpg, svibanj 2018.

35. Je li u oba reda isti broj brodova?

 [26]

UPARIVANJE SIMBOLA I KOLIČINE

36. Pokaži mi gdje piše koliko je nacrtano koliko ima sunca.

 [27]

4

2

[26] https://i.pinimg.com/736x/fd/30/45/fd3045b99184ee819b6fa76edda10039--royalty-free-images-art-clipart.jpg, uređeno u programu PaintNet, svibanj 2018.
[27] https://i.pinimg.com/originals/7c/fe/8c/7cfe8c1126326bd450c36a6ea0d17961.png, svibanj 2018.

37. Pokaži mi gdje piše koliko je nacrtano koliko ima gljiva .

[28]

6	4

38. Pokaži mi gdje piše koliko je nacrtano koliko ima zvijezdi.

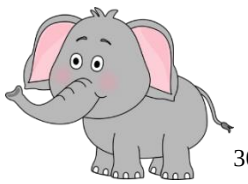
[29]

9	7

[28] http://www.clker.com/cliparts/6/b/6/f/12387028711996368475rugby471_Tango_Style_Mushroom.svg.hi.png, svibanj 2018.
[29] http://images.clipartpanda.com/clipart-star-yckBEbKcE.png, svibanj 2018.

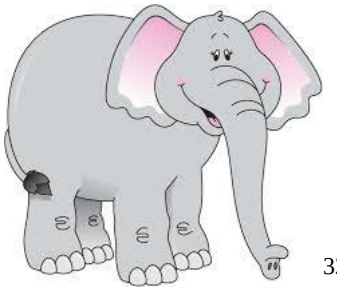
RAZUMIJEVANJE RELACIJSKIH ODNOSA

39. Pokaži onog slona koji je manji od prvog slona. Pokaži onog slona koji je veći od prvog slona.

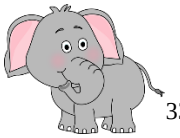


30

31

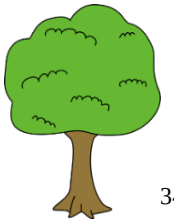


32

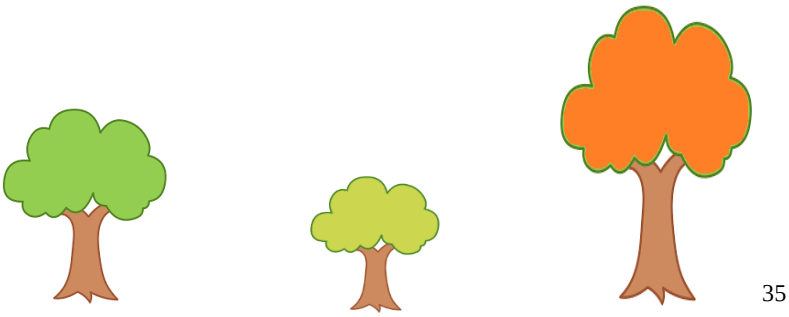


33

40. Pokaži ono drvo koje je više od drveta na prvoj slici. Pokaži ono drvo koje je niže od drveta na prvoj slici.



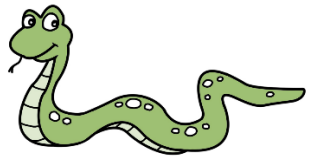
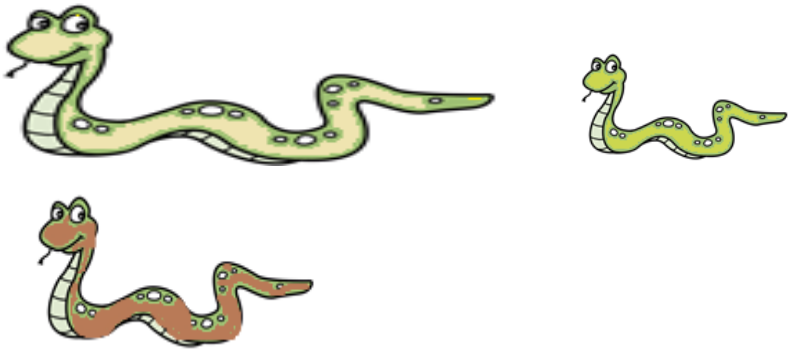
34



35

[30] https://content.mycutegraphics.com/graphics/animal/elephant-blowing-hearts.png, svibanj 2018.
[31] http://moziru.com/images/elephant-clipart-elephant-cartoon-10.png, svibanj 2018.
[32] http://clipartoons.com/wp-content/uploads/2015/12/elephants-clipart-3-jpeg.jpeg, svibanj 2018.
[33] https://i.pinimg.com/236x/0d/74/70/0d7470b730618c37094d9b42fd7678bd--cute-elephant-clipart.jpg, svibanj 2018.
[34] https://content.mycutegraphics.com/graphics/nature/big-tree.png, svibanj 2018.
[35] https://banner2.kisspng.com/20180203/voq/kisspng-tree-drawing-autumn-clip-art-transparent-tree-cliparts-5a75e09c8103b3.349284731517674652528 5.jpg, uređeno u programu Paint, svibanj 2018.

41. Pokaži onu zmiju koja je duža od prve zmije. Pokaži onu zmiju koja je kraća od prve zmije.

 36	

42. Pokaži tanjur s najviše kolača. Pokaži tanjur s najmanje kolača.
37

[36] http://worldartsme.com/images/free-snake-clipart-1.jpg, uređeno u programu Paint, svibanj 2018.
[37] https://img.etsystatic.com/il/5405a0/1032193396/il_570xN.1032193396_gg5b.jpg?version=1; http://worldartsme.com/images/meal-plate-clipart-1.jpg, uređeno u programu PaintNet, svibanj 2018.

43. Pokaži najvišu zgradu. Pokaži najnižu zgradu. Pokaži zgradu srednje veličine.

[38]

44. Pokaži najdužu granu. Pokaži najkraću granu. Pokaži granu srednje veličine.

[39]

[38] https://dumielauxepices.net/sites/default/files/bulding-clipart-pink-building-872054-527521.jpg, uređeno u programu PaintNet, svibanj 2018.
[39] http://images.clipartpanda.com/branch-clipart-tree-branch-with-leaves.svg, uređeno u programu Paint, svibanj 2018.

NASTAVLJANJE NIZA

45. Ovdje imaš crteže koji idu po nekom redu. Pokaži mi kako bi dalje po redu išli crteži tako da budu isti kao ovi nacrtani.

46. Ovdje imaš crteže koji idu po nekom redu. Pokaži mi kako bi dalje po redu išli crteži tako da budu isti kao ovi nacrtani.

47. Ovdje imaš crteže koji idu po nekom redu. Pokaži mi kako bi dalje po redu išli crteži tako da budu isti kao ovi nacrtani.

Napomena: Tijekom ispitivanja djetetu se ponude određeni predmeti za svaki niz između kojih ono bira koji je sljedeći.

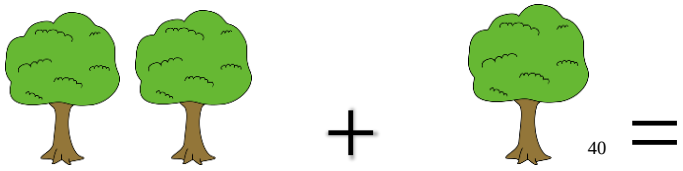
PREPOZNAVANJE GREŠAKA U BROJENJU

Sada ću ja brojiti, a ti pažljivo slušaj jesam li ispravno prebrojila točkice!

48. Greška 1 -preskakanje broja u nizu
49. Greška 2 - ponavljanje broja tijekom prebrojavanja
50. Greška 3- ponovno brojenje istog predmeta

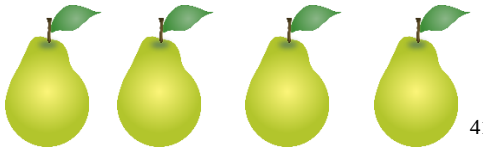
ARITMETIČKE OPERACIJE

51. Ovdje su 2 stabla, a zatim dodaš još 1. Reci mi koliko je sad ukupno stabala?

 [40]

[40] https://content.mycutegraphics.com/graphics/nature/big-tree.png, svibanj 2018.

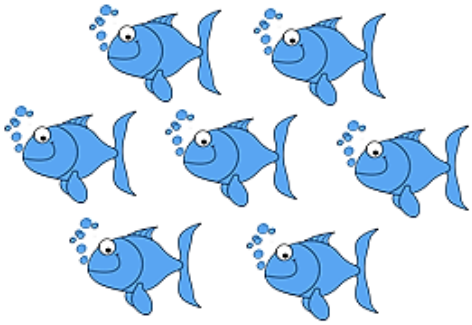
52. Ovdje su 4 kruške, a zatim 1 sakriješ. Reci mi koliko je sad krušaka ostalo?

 [41]

53. Ovdje su 3 keksa, a zatim dodaš još 4. Reci mi koliko je sad ukupno keksa?

[42]

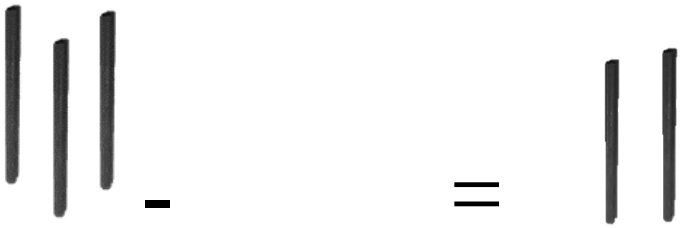
54. Ovdje je 7 riba, a zatim 2 sakriješ. Reci mi koliko je sad riba ostalo?

 [43]

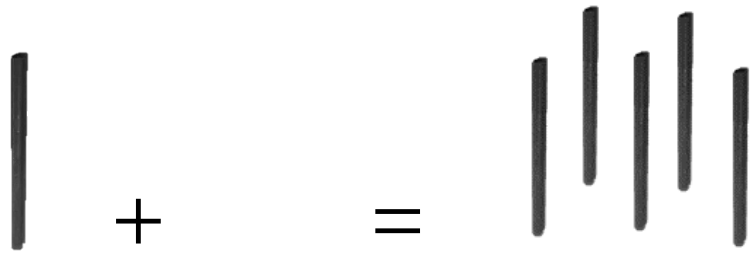
55. Ovdje je 1 štapić. Reci mi koliko još štapića trebaš uzeti da bi ih imao/la 2?

[41] https://openclipart.org/image/2400px/svg_to_png/293569/1515286068.png, svibanj 2018.
[42] https://i.pinimg.com/236x/e8/d7/7e/e8d77ee48131f3c0316371ea7a2e2e29--funny-stories-zac.jpg, svibanj 2018.
[43] http://images.clipartpanda.com/cute-blue-fish-clipart-light-blue-fish.svg, uređeno u programu Paint, svibanj 2018.

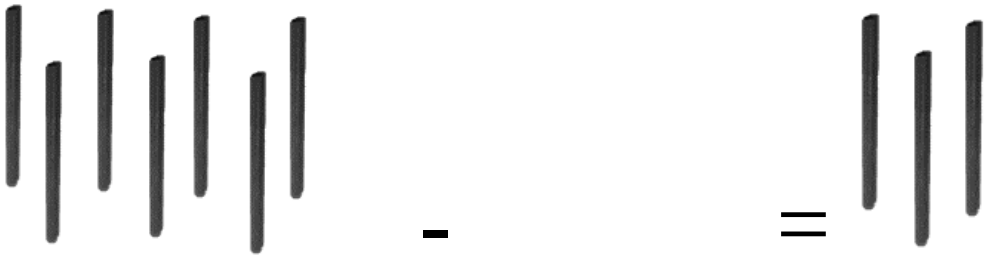
56. Ovdje su 3 štapića. Reci mi koliko štapića trebaš maknuti da bi ti ostala samo 2?



57. Ovdje su 2 štapića. Reci mi koliko još štapića trebaš uzeti da bi ih imao/la 5?



58. Ovdje je 7 štapića. Reci mi koliko štapića moraš maknuti da bi ti ostala samo 3?



Napomena: Tijekom ispitivanja koriste se pravi štapići poput ovih sa slike.

PROBLEMSKI ZADACI

59. Imaš 2 lopte i dobiješ još 2 za rođendan. Koliko imaš ukupno lopti?

60. Imaš 4 čokolade i još dobiješ 3. Koliko imaš ukupno čokolada?

61. Imaš 3 bombona i 1 si dao/la prijatelju. Koliko ti je bombona ostalo?

62. Imaš 5 bojica i izgubio/la si 2. Koliko ti je bojica ostalo?